Technische Universität Wien

Ass. Prof. Dr. A. Toschi, Prof. Dr. K. Held
Dipl.-Ing. Dr. G. Rohringer, Dipl.-Ing. T. Schäfer

6. Übung zur Quantentheorie II

Wintersemester 2014/2015

TUTORIUM: Freitag, 16.01.2015.

12. Basiswechsel in zweiter Quantisierung

1.5+1+2+1.5=6 Punkte

a) Seien $\hat{a}_\alpha^\dagger$ und $\hat{a}_\alpha$ die Erzeugungs-/Vernichtungsoperatoren in einer bestimmten Einteilchen-ON-Basis $\{|\varphi_\alpha\rangle\}$, so hat man in Besetzungszahldarstellung $\hat{a}_\alpha^\dagger|0\rangle \equiv |0,0,...,\overset{Zust.\,\alpha}{1},0,0,...\rangle$. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, kann ein beliebiger Einteilchenoperator $\hat{F}^{(1)}$ in 2. Quantisierung folgendermaßen dargestellt werden:

$$\hat{F}^{(1)} = \sum_{\alpha\alpha'} f_{\alpha'\alpha}^{(1)} \hat{a}_{\alpha'}^\dagger \hat{a}_\alpha \quad \text{mit} \quad f_{\alpha'\alpha}^{(1)} = < \varphi_{\alpha'}|\hat{f}^{(1)}|\varphi_\alpha >,$$

wobei $\hat{f}^{(1)}$ ein beliebiger im Einteilchen-Hilbertraum wirkender Operator ist. Drücken Sie nun die Erzeugungs-/Vernichtungsoperatoren $\hat{\tilde{a}}_\beta^\dagger$ und $\hat{\tilde{a}}_\beta$ einer neuen Einteilchen-ON-Basis $\{|\widetilde{\varphi}_\beta\rangle\}$ durch $\hat{a}_\alpha^\dagger$ und $\hat{a}_\alpha$ aus, indem Sie den oben gegebenen Einteilchenoperator in dieser neuen Basis darstellen.

b) Beweisen Sie, ausgehend von den Vertauschungrelationen für Bosonen, dass die Erzeuger/Vernichter in der neuen ON-Basis $\{|\widetilde{\varphi}_\beta\rangle\}$ die gleichen Vertauschungrelationen wie $\hat{a}_\alpha^\dagger$ und $\hat{a}_\alpha$ erfüllen.

Betrachten Sie nun den Hamilton-Operator des eindimensionalen **spinlosen bosonischen Hubbard-Modells**

$$\hat{\mathcal{H}} = -t \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=i\pm1} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \frac{U}{2} \sum_{i=1}^{M} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i, \tag{1}$$

wobei periodische Randbedingungen angenommen sind, d.h. $i = 0 \mathrel{\hat{=}} M$. (Man kann sich vorstellen, dass das eindimensionale Gitter zu einem Ring verformt wird.) Der erste Beitrag (t) beschreibt das Hüpfen eines Bosons vom Gitterplatz i zu einem der beiden benachbarten Gitterplätze $j = i \pm 1$. Er stellt somit die kinetische Energie des Systems dar. Der zweite Beitrag (U) stellt die Wechselwirkung der Bosonen dar, die denselben Gitterplatz i besetzen.

c) Betrachten Sie im Fall $\boldsymbol{U=0}$ den folgenden Basiswechsel $\hat{\tilde{a}}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x_i} \mathrm{e}^{-ikx_i}\ \hat{a}_i^\dagger$ bzw. $\hat{\tilde{a}}_k = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x_i} \mathrm{e}^{ikx_i}\ \hat{a}_i$, wobei $\hat{a}_i^\dagger$ und $\hat{a}_i$ der Erzeugungs-/Vernichtungsoperatoren für ein Boson auf dem Gitterplatz $x_i = i\,\ell$, mit $i = 1, ..., M$ sind (ℓ ist die Gitterkonstante). Für welche Werte von k ist der Hamiltonoperator in der neuen Basis diagonal? Geben Sie auch die entsprechenden Energieeigenwerte an.

d) Berechnen Sie für $\boldsymbol{U=0}$ die Energien des Grundzustands und ersten angeregten Zustands für $M = 4$ Gitterplätze und (i) $N = 1$ bzw. (ii) $N = 4$ Teilchen. Geben Sie diese Zustände sowohl in erster als auch zweiter Quantisierung an. Ermitteln Sie außerdem die Energie des Grundzustandes und dessen Entartung im Fall $\boldsymbol{t=0}$ (aber $\boldsymbol{U>0}$) für (i) $N = 1$ bzw. (ii) $N = 4$ Teilchen.

13. Atom in einem elektromagnetischen Feld

1+2.5+0.5+2=4+2* Punkte*

Wir betrachten ein Atom, welches sich in zwei möglichen Energieniveaus $E_0 = 0$ (Grundzustand) und $E_1 = \hbar\omega_a$ (angeregter Zustand) befinden kann. Das Atom soll mit einem einmodigen elektromagnetischen Strahlungsfeld wechselwirken, welches quantenmechanisch durch einen harmonischen Oszillator mit der Frequenz ω_r beschrieben werden kann (die Amplitude des Feldes entspricht dann der Quantenzahl n des Oszillators, d.h., der Zahl der *Photonen*). Der Hamilton-Operator des Systems hat in zweiter Quantisierung folgende Form:

$$H = \underbrace{\sum_{i=0,1} E_i \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i}_{H_{\text{Atom}}} + \underbrace{\hbar\omega_r \hat{a}^\dagger \hat{a}}_{H_{\text{Feld}}} + \underbrace{\hbar g(\hat{a}^\dagger \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_1 + \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_0 \hat{a})}_{H_{\text{WW}}}$$

mit der Kopplungskonstanten $g \in \mathbb{R}^+$. Beachten Sie hierbei, dass die Photonen des Strahlungsfelds Bosonen sind.

a) Ermitteln Sie zunächst den Grundzustand dieses Systems und geben Sie dessen Energie an.

b) Berechnen Sie nun die angeregten Eigenzustände des Systems und deren Eigenenergien. *Hinweis: Beachten Sie, dass der durch die Zustände* $\frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{c}_1^\dagger(\hat{a}^\dagger)^n|vac\rangle$ *und* $\frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}\hat{c}_0^\dagger(\hat{a}^\dagger)^{n+1}|vac\rangle$ *gegebene Unterraum des gesamten Hilbertraums invariant bezüglich der Anwendung des Hamilton-Operators ist. Stellen Sie den Hamilton-Operator als Matrix in diesem Unterraum dar.*

c) Stellen Sie die ermittelten Eigenzustände auch in zweiter Quantisierung mittels Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren dar.

d) * Nehmen Sie nun an, dass sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $\frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{c}_1^\dagger(\hat{a}^\dagger)^n|vac\rangle$ befindet. Geben Sie die Zeitentwicklung dieses Zustands an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Elektron zu einem Zeitpunkt $t > 0$ im Zustand $\frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}\hat{c}_0^\dagger(\hat{a}^\dagger)^{n+1}|vac\rangle$ zu finden. Unter welcher Bedingung kann diese Wahrscheinlichkeit den Wert 1 erreichen?