

# 1. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 16.10.2015

## 1. Zwei Spins $s = 1/2$ mit der Wechselwirkung

Der Hamiltonoperator eines Systems von zwei (unterscheidbaren) Spins  $s = 1/2$  sei durch

$$H = \frac{1}{\hbar} (S_z^{(1)} - S_z^{(2)}) + \lambda \frac{4}{\hbar^2} S_y^{(1)} S_y^{(2)}$$

gegeben (Energie in geeigneten Einheiten gemessen). Stellen Sie  $H$  als Matrix in der  $\{m_{S1}m_{S2}\}$ -Basis dar und bestimmen Sie die Grundzustandsenergie  $E_0$  und den zugehörigen auf 1 normierten Eigenvektor  $|u_0\rangle$  durch Diagonalisierung dieser Matrix.

## 2. Elektron im homogenen elektrischen Feld

Betrachten Sie ein ungebundenes Elektron in einem homogenen elektrischen Feld  $F$ .

- Geben Sie unter Berücksichtigung der Ladung  $-e$  des Elektrons die stationäre Schrödingergleichung sowohl im Orts-, als auch im Impulsraum an. Für die Transformation in den Impulsraum ist es ausreichend die Operatoren im Ortsraum mit den entsprechenden Operatoren im Impulsraum zu ersetzen.
- Berechnen Sie die stationären Zustände  $\langle k | \Psi_E \rangle$  der Schrödingergleichung im Impulsraum und normieren Sie diese mit Hilfe der Orthonormierungsbedingung

$$\langle \tilde{\Psi}_E(k) | \tilde{\Psi}_{E'}(k) \rangle = \delta(E - E').$$

- Transformieren Sie die Lösung in den Ortsraum und drücken Sie diese mit Hilfe der Airy-Funktion aus:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(xq + \frac{q^3}{3})} dq.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

Hinweis: Sie können das Betragsquadrat der Airyfunktion mit dem folgenden Ausdruck in Wolfram Alpha plotten: `Plot[Abs[Ai[x]]^2, {x, -10, 10}`

## 3. Harmonischer Oszillator

Gegeben sei der eindimensionale harmonische Oszillator, bestimmt durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}.$$

- Geben Sie die "Energie-Darstellung" (i) des Ortsoperators  $\hat{x}$  und (ii) des Impulsoperators  $\hat{p}$  an, indem Sie die entsprechenden Matrix-elemente  $\langle n | \hat{x} | m \rangle$  bzw.  $\langle n | \hat{p} | m \rangle$  berechnen (es gilt  $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ ). Sind Ihre Matrizen hermitesch? Begründen Sie physikalisch warum alle Diagonalelemente der Matrizen verschwinden.

- (b) Drücken Sie die Matrixelemente  $\langle n|\hat{p}|m\rangle$  durch die Matrixelemente  $\langle n|\hat{x}|m\rangle$  aus, indem Sie  $\alpha_{n,m}$  in

$$\langle n|\hat{p}|m\rangle = \alpha_{n,m}\langle n|\hat{x}|m\rangle$$

bestimmen.

- (c) Zeigen Sie auf Basis der Ergebnisse aus (a) und (b), dass für den harmonischen Oszillator das “Ehrenfest-Theorem” gilt, wonach für einen beliebigen Zustand  $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} \sum_n c_n |n\rangle$  die Erwartungswerte für Ort und Impuls die klassischen Bewegungsgleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \hat{x} | \psi(t) \rangle &= \frac{1}{m} \langle \psi(t) | \hat{p} | \psi(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \hat{p} | \psi(t) \rangle &= -m\omega^2 \langle \psi(t) | \hat{x} | \psi(t) \rangle. \end{aligned}$$

Zu kreuzen: 1/2/3