2. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 30.10.2015

1. Ein Elektronenspin befindet sich in einem Magnetfeld $\vec{B} = (0, B, 0)^T$. Der entsprechende Hamiltonoperator lautet $H = -\vec{\mu}\vec{B} = \frac{eB}{mc} S_y$, wobei $\vec{S} = \hbar/2(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$.

   (a) Berechnen Sie die Paulimatrizen $\sigma_{x,H}(t)$, $\sigma_{y,H}(t)$ und $\sigma_{z,H}(t)$ im Heisenbergbild indem Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen lösen. Schrödingerbild und Heisenbergbild sollen bei $t = 0$ zusammenfallen.

   (b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Spin im Zustand $|\chi(0)\rangle$ mit $S_z|\chi(0)\rangle = -\hbar/2|\chi(0)\rangle$. Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus (a) die Erwartungswerte der drei Spinkomponenten für $t \geq 0$. Zeigen Sie auf Basis Ihrer Ergebnisse für die Bewegung des Vektors $\langle\vec{S}\rangle_t$ mit welcher Frequenz und um welche Achse der Spin im Magnetfeld präzediert. Unterscheidet sich die Bewegung $\langle\vec{S}\rangle_t$ von der eines klassischen magnetischen Dipols im Magnetfeld?

   (c) Stellen Sie Ihre Lösung aus (b) für $\langle\vec{S}\rangle_t$ mit Hilfe der Bloch-Kugel dar und überlegen Sie (ohne Rechnung), in welche Richtung Sie ein Magnetfeld anlegen müssen, damit der Spin $|\chi(0)\rangle$ bei seiner Präzession zu einem späteren Zeitpunkt t_0 den Erwartungswert $\langle S_y(t_0)\rangle = \pm\hbar/2$ haben wird. Bestimmen Sie den entsprechenden Zeitpunkt t_0.

2. Betrachtet wird ein Hilbertraum bestehend aus den Drehimpulseigenzuständen eines Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$ mit $j = 1$. Der Hamiltonoperator H ist gegeben durch

$$H = H_0 + V,$$

   wobei $H_0 = -\frac{qB}{mc} J_x$ und $V = \frac{\omega}{\hbar} J^2$.

   (a) Berechnen Sie den Zeitentwicklungsoperator $U_0(t)$ bzgl. H_0 in der $\{m_j\}$-Darstellung. Hinweis: Um J_x in der $\{m_j\}$-Darstellung berechnen zu können, verwenden Sie $J_\pm|j, m_j\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m_j)(j \pm m_j + 1)}|j, m_j \pm 1\rangle$.

   (b) Benutzen Sie das Ergebnis aus (a) um das Potential $V_I(t)$ im Wechselwirkungsbild auszurechnen.

3. Ein Elektron befinde sich in einem zeitlich konstanten und homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\,\vec{e}_y$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür zum Zeitpunkt $t \geq 0$ bei einer Messung von S_z den Messwert $+\frac{\hbar}{2}$ zu erhalten, wenn das Elektron zum Zeitpunkt $t = 0$

   (a) durch das statistische Gemisch mit Dichteoperator

$$\rho = p|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + (1-p)|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\,, \quad p \in [0, 1]$$

   (b) durch den reinen Zustand

$$|\chi\rangle = \sqrt{p}|\uparrow\rangle + e^{i\delta}\sqrt{1-p}|\downarrow\rangle, \quad \delta \in [0, 2\pi), \quad p \in [0, 1]$$

   beschrieben wird ($\sigma_z|\uparrow\rangle = +|\uparrow\rangle$, $\sigma_z|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$). Vergleichen Sie die unter (a) und (b) gefundenen Ergebnisse als Funktion der Relativphase δ und geben Sie deren Differenz eine physikalische Bedeutung.

Zu kreuzen: 1/2/3