5. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 11.12.2015

1. **Absorption eines Photons**

   Das Valenzelektron eines Atoms werde durch Absorption eines Photons mit Wellenzahl $\vec{k}$ und mit Polarisationsvektor $\vec{e} \perp \vec{k}$ vom Zustand $|i\rangle \equiv |n\,l\,m_l\,s\,m_s\rangle$ in einen angeregten Zustand $|f\rangle \equiv |n'\,l'\,m_l'\,s\,m_s'\rangle$ gehoben. Nehmen Sie nun an, bei dem entsprechenden Anregungsprozess handle es sich um einen elektrischen Dipolübergang. In diesem Fall wird die Übergangswahrscheinlichkeit durch folgendes Matrixelement mit dem Dipoloperator $\vec{D}$ bestimmt: $|\langle f|\vec{e}\cdot\vec{D}|i\rangle|^2$. Zeigen Sie auf dieser Basis, dass für die in Frage kommenden Dipolübergänge folgende Auswahlregeln gelten: $\Delta l \equiv l' - l = \pm 1$, $\Delta m_l \equiv m_l' - m_l = 0, \pm 1$, $\Delta m_s \equiv m_s' - m_s = 0$. *Hinweis*: Verwenden Sie für Ihre Ableitung das Wigner-Eckhart-Theorem, sowie Überlegungen zur Parität der auftretenden Wellenfunktionen. Weiters gilt folgende Identität für das Skalarprodukt zweier Vektoroperatoren: $\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = \sum_{q=-1}^{1} (-1)^q A_q^1 B_{-q}^1$ (wobei A_q^1, B_q^1 die sphärischen Komponenten der Vektoroperatoren sind).

2. **Kramers Theorem**

   (a) Betrachten Sie ein quantenmechanisches System im Zustand $|\psi\rangle$. Eine zweimalige Anwendung des Zeitumkehroperators $\hat{T}$ darf per Definition physikalisch keine Auswirkung haben, weswegen $\hat{T}^2|\psi\rangle = c|\psi\rangle$ mit $|c| = 1$ gilt. Zeigen Sie für beliebiges $|\psi\rangle$, dass c nur die Werte ± 1 annehmen kann.
   Hinweis: Betrachten Sie die Wirkung von $\hat{T}^2$ auf den Zustand $|\psi\rangle + \hat{T}|\psi\rangle$.

   (b) Argumentieren Sie nun, warum in einem System mit ungerader Anzahl von Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen (das heißt halbzahligem Gesamtspin) die Eigenwerte c von $\hat{T}^2$ immer den Wert $c = -1$ annehmen.

   Hinweis: Bringen Sie $\hat{T}^2$ mit dem in der Vorlesung vorgestellten Rotationsoperator $\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ in Verbindung.

   (c) Beweisen Sie nun das Kramers-Theorem, demzufolge ein System mit Zeitumkehr-Invarianz und halbzahligem Gesamtspin nur Eigenwerte besitzt, die mindestens zweifach entartet sind.

   (d) Argumentieren Sie, warum im Allgemeinen der Grad der Entartung für derartige Systeme geradzahlig sein muss. Zeigen Sie explizit, dass dreifache Entartung nicht möglich ist.

   (e) Betrachten Sie das Elektron eines Wasserstoffatoms in einem Zustand mit Hauptquantenzahl $n = 1$. Laut Ihrem Beweis aus b) muss es nun zum Energieeigenwert $E_{n=1}$ mindestens zwei entartete Zustände geben. Schreiben Sie diese an.

3. **Störungstheorie** Der Hamiltonoperator eines Spins $s = \frac{3}{2}$ ist gegeben durch, $H = H_0 + V$,

$$H_0 = \hbar\omega \left[2\frac{S_z}{\hbar} - \left(\frac{S_z}{\hbar}\right)^2 \right] \qquad \text{und} \qquad V = \gamma\hbar\omega\frac{S_x}{\hbar},$$

wobei angenommen wird, dass $|\gamma| \ll 1$.

(a) Bestimmen Sie die exakten Eigenwerte von H_0 und deren Entartung.

(b) Berechnen Sie die störungstheoretische Energiekorrektur von H_0. Je nach Eigenwert, verwenden Sie hier entweder die nicht-entartete Störungstheorie erster Ordnung oder die entartete Störungstheorie.

Zu kreuzen: 1/2/3