6. Tutorium - VU Quantentheorie 2 - 8.1.2016

1. **Zeitabhängige Störungstheorie**

   Ein Teilchen der Ladung q befinde sich im Grundzustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Kreisfrequenz ω. Berechnen Sie (in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie) die Wahrscheinlichkeit W_n, mit der das Teilchen in den n-ten angeregten Oszillatorzustand übergeht, wenn der Oszillator durch einen Gauss-förmigen Laserpuls angestoßen wird. Das elektrische Feld des Laserpulses kann als räumlich homogen betrachtet werden und habe folgende zeitliche Abhängigkeit,

   $$E(t) = \frac{A}{\tau_0\sqrt{\pi}} \exp(-t^2/\tau_0^2)\,. \tag{1}$$

   Lösen Sie die auftretenden Integrale rein analytisch und geben Sie eine Abschätzung für die Gültigkeit der störungstheoretischen Approximation an.

2. **Beta-Zerfall im Tritium-Atom**

   Um die Masse des Elektron-Antineutrinos $\bar{\nu}_e$ zu bestimmen, betrachtet man im Experiment den Zerfall eines instabilen Tritium-Atoms, dessen Kernladung sich durch Beta-Zerfall plötzlich ändert, ${}^3\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He}^+ + e^- + \bar{\nu}_e$. Beantworten Sie zu diesem Experiment folgende Fragen:

   (a) Schätzen Sie die klassischen Zeitskalen ab (i) mit der das Elektron im Grundzustand von ${}^3H$ den Atomkern umrundet bzw. (ii) mit der das aus dem Kern emittierte Elektron die Elektronenhülle durchquert. Beurteilen Sie auf Basis Ihrer Abschätzung welche Näherung Sie für die zeitabhängige Störungsrechnung im Punkt (b) verwenden können.

   (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W mit der das im Grundzustand befindliche Hüllenelektron des ^{3}H–Atoms nach dem Zerfallsprozess im Grundzustand des ^{3}He$^+$–Ions zu finden sein wird. (Alle auftretenden Integrale sollen explizit berechnet werden, sodass Sie für die gefragte Übergangswahrscheinlichkeit W einen analytischen Ausdruck anschreiben können.)

3. **Variationsrechnung**

   Im folgenden Beispiel betrachten wir ein ultrakaltes Neutron wie es zum Beispiel auch aus dem Reaktor am Atominstitut emittiert wird. Wir nehmen an, dass sich das Neutron im Schwerefeld der Erde überhalb eines Glasspiegels befindet in welchen es nicht eindringen kann. Unter Vernachlässigung der horizontalen Bewegung nehmen wir an, dass das Neutron sich im Grundzustand befindet.

   (a) Skizzieren Sie das Potential und überlegen Sie sich wie die Grundzustandsfunktion des Neutrons aussehen muss. Welche Randbedingung muss die Wellenfunktion des Grundzustands beim Isolator ($z = 0$), bzw. asymptotisch für $z \to \infty$ erfüllen?

   (b) Überlegen Sie sich auf Basis von Punkt (a) mögliche Testfunktionen, welche gute Approximationen der Wellenfunktion des Grundzustands darstellen können.

   (c) Wählen Sie eine der Testfunktionen aus und führen Sie eine Variationsrechnung durch, um die Grundzustandsenergie des Neutrons abschätzen zu können. Wie muss sich die approximierte Grundzustandsenergie im Vergleich zu einem exakten Ergebnis verhalten?

   (d) Wir wollen neben der Grundzustandsenergie auch die Energie des 1. angeregten Zustands abschätzen. Skizzieren Sie die entsprechende Funktion und geben Sie eine mögliche Testfunktion für den 1. angeregten Zustand an. Wie müssten Sie die Rechnung ansetzen um nun die Energie des 1. angeregten Zustands abschätzen zu können. *Hier ist nur der Ansatz und keine vollständige Rechnung gefragt.*

4. **Identische Teilchen im harmonischen Oszillator**

   Zwei identische Teilchen befinden sich im eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Kreisfrequenz ω.

   (a) Nehmen Sie an, dass der Spin der Teilchen 0 ist und geben Sie sowohl die drei niedrigsten Energieeigenwerte E_0,E_1 und E_2, als auch die zugehörigen Eigenzustände und deren Entartungsgrade an.

   (b) Betrachten Sie 2 Teilchen mit Spin-$\frac{1}{2}$ und beantworten Sie die gleichen Fragen wie bei Punkt (a).

Zu kreuzen: 1/2/3/4