Musterlösung Spin-½-System A/B

$\rho_0 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&3\\3&9\end{pmatrix}$ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$

a) $P_\uparrow = \langle \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\rangle$ $P_\downarrow = \langle \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\rangle$ Mögliche Messwerte: $S_z = +\frac{\hbar}{2} \rightarrow$ Kollaps auf $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

$S_z = -\frac{\hbar}{2} \rightarrow$ Kollaps auf $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$P_\uparrow = 1/10$ $4/5$

$P_\downarrow = 9/10$ $1/5$

b) $e^{i\frac{Ht}{\hbar}} = e^{-iB_z g \mu_B \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\hbar}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}t} = e^{-i\frac{\omega}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}t}$ $\omega = B_z g \mu_B$

$= \begin{pmatrix}e^{-i\frac{\omega}{2}t}&0\\0&e^{i\frac{\omega}{2}t}\end{pmatrix} \rightarrow e^{-i\frac{H}{\hbar}t} = \begin{pmatrix}e^{\frac{i\omega t}{2}}&0\\0&e^{-\frac{i\omega t}{2}}\end{pmatrix}$

$\rho(t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\rho_0 e^{i\frac{H}{\hbar}t} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&3e^{-i\omega t}\\3e^{i\omega t}&9\end{pmatrix}$ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&2e^{-i\omega t}\\2e^{i\omega t}&1\end{pmatrix}$

c) $\langle S_x(t)\rangle = \mathrm{Tr}\left(\rho(t)\cdot\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = \frac{\hbar}{2}\cdot(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})\cdot\frac{3}{10}$ $\frac{2}{5}$ $=$

$\hbar\cos(\omega t)\frac{3}{10}$ $\frac{2}{5}$

$\langle S_y(t)\rangle = \mathrm{Tr}\left(\rho(t)\cdot\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\right) = \frac{\hbar}{2}\cdot i(e^{-i\omega t}-e^{i\omega t})\frac{3}{10}$ $\frac{2}{5}$ $=$

$\hbar\cdot\sin(\omega t)\frac{3}{10}$ $\frac{2}{5}$

d) Wahrscheinlichkeit für $S_{z\uparrow}$-Messung ist $1/10$ $4/5$ (Erwartungswert von $P_\uparrow \cdot \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$)

— " — $S_{z\downarrow}$-Messung ist $9/10$ $1/5$ (— " — $P_\downarrow \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$)

(Zeitabhängigkeit kürzt sich)

Nach der Messung kollabiert der Zustand jedenfalls auf den Eigenzustand zum gemessenen Eigenwert.

Die Dichtematrix ergibt sich als gewichtetes Mittel der Dichtematrizen der reinen Zustände

$\rho_{neu} = P_\uparrow \cdot |S_{z\uparrow}\rangle\langle S_{z\uparrow}| + P_\downarrow |S_{z\downarrow}\rangle\langle S_{z\downarrow}|$

$\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ 0) = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)$ $\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 1) = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right) \rightarrow$

$\rho_{neu} = \begin{pmatrix}P_\uparrow&\emptyset\\\emptyset&P_\downarrow\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&0\\0&9\end{pmatrix}$ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$

Musterlösung Born'sche Näherung

$$f(\theta,\varphi) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \underbrace{\langle \phi_q | V | \phi_{q'} \rangle}_{V(q)}$$

$$V(q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r \, e^{-i\vec{q}\vec{r}} \, V(\vec{r})$$

Gruppe B: $\alpha \to \beta$

$$V(\vec{r}) = V_0 \, e^{-r/\alpha}, \quad \alpha > 0$$

$$V(q) = \frac{V_0}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr \, r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \; e^{iqr\cos\theta} \, e^{-r/\alpha}$$

$$= \frac{V_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dr \, r^2 e^{-r/\alpha} \underbrace{\int_{-1}^{1} du \; e^{iqru}}_{\frac{1}{iqr}\cdot\left(e^{iqr} - e^{-iqr}\right)}$$

$$= \frac{V_0}{(2\pi)^2} \frac{1}{iq} \int dr \, e^{-r/\alpha} \cdot r \left(e^{iqr} - e^{-iqr}\right)$$

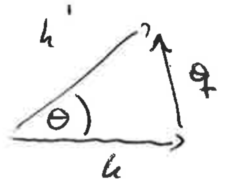
$$\pm \int dr \, e^{\left(-\frac{1}{\alpha} \pm iq\right) r} \cdot r = \pm \frac{e^{\left(-\frac{1}{\alpha} \pm iq\right) r}}{-\frac{1}{\alpha} \pm iq} \, r \Big|_0^\infty \mp \int dr \frac{e^{\left(-\frac{1}{\alpha} \pm iq\right) r}}{\left(-\frac{1}{\alpha} \pm iq\right)}$$

$$= \mp \frac{e^{\left(-\frac{1}{\alpha} \pm iq\right) r}}{\left(-\frac{1}{\alpha} \pm iq\right)^2} \Big|_0^\infty = \pm \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha} \mp iq\right)^2}$$

$$V(q) = \frac{V_0}{(2\pi)^2} \frac{1}{iq} \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha} - iq\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha} + iq\right)^2} \right) = \frac{V_0}{(2\pi)^2} \frac{1}{iq} \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{2iq}{\alpha} - q^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{2iq}{\alpha} + q^2}{\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + q^2\right)^2}$$

$$= \frac{V_0}{(2\pi)^2} \frac{4}{\alpha} \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + q^2\right)^2}$$

$$f(\theta,\varphi) = -\frac{V_0 m}{\hbar^2} \frac{4/\alpha}{\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 4k^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}$$



$$q^2 = 4k^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

2b)

(i) $V(r) = \frac{e^2}{r} - e^2\left(\frac{1-e^{-2r/a}}{r}\right) = \frac{e^2}{r}\cdot e^{-2r/a}$

fällt schneller ab als jedes Polynom im Nenner → konvergiert!

(ii) $V(r) = e^2\,\frac{e^{-2r/a}}{r}$ Yukawa!

$$V(q) = \frac{e^2}{(2\pi)^2}\int dr\,\frac{r^2}{r}\,e^{-2r/a}\int_{-1}^{1} du\, e^{iqru}$$

$$= \frac{e^2}{(2\pi)^2}\int dr\, r e^{-2r/a}\,\frac{e^{iqr}-e^{-iqr}}{iqr} =$$

$$= \frac{e^2}{(2\pi)^2}\int dr\,\frac{1}{iq}\cdot\left(e^{(-\frac{2}{a}+iq)r} - e^{(-\frac{2}{a}-iq)r}\right) =$$

$$\frac{e^2}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{iq}\left(-\frac{1}{-\frac{2}{a}+iq} + \frac{1}{-\frac{2}{a}-iq}\right) =$$

$$\frac{e^2}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{iq}\,\frac{\frac{2}{a}+iq-\frac{2}{a}+iq}{\left(\frac{2}{a}\right)^2+q^2} = \frac{e^2}{(2\pi)^2}\,\frac{2}{\left(\frac{2}{a}\right)^2+q^2}$$

$\left(\frac{2}{a}\right)^2$ - Term im Nenner → Abschirmungseffekt!

Musterlösung : Anregungen in einem Atom

Bekannt : $|\Psi_{nlm}\rangle$, $E_n^{(0)} = -\frac{Z^2}{n^2} \cdot 1 R_y \equiv \frac{E_1}{n^2}$

Wir nennen um :

$$|n\, l\, m\, m_s\rangle = |\Psi_{nlm}\rangle \otimes |\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spin } \frac{1}{2} \\ m_s = \pm\frac{1}{2}}}{\chi_{m_s}}\rangle$$

$$H_B = \underbrace{-\frac{e}{2mc} B_0}_{\tilde{B}} (L_z + g S_z) \equiv -\tilde{B} (L_z + g S_z)$$

a) Skizze

$$E_1^{(1)} = E_1 + \langle 1 0 0\, m_s | H_B | 1 0 0\, m_s \rangle =$$

$$= E_1 - \tilde{B} g m_s = E_1 \mp \tilde{B} \frac{g}{2}$$

$$E_2^{(0)} = \frac{E_1}{4} \text{ entartet } \begin{cases} l = 0 \\ l = 1 ;\ m = 0, \pm 1 ;\ m_s = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

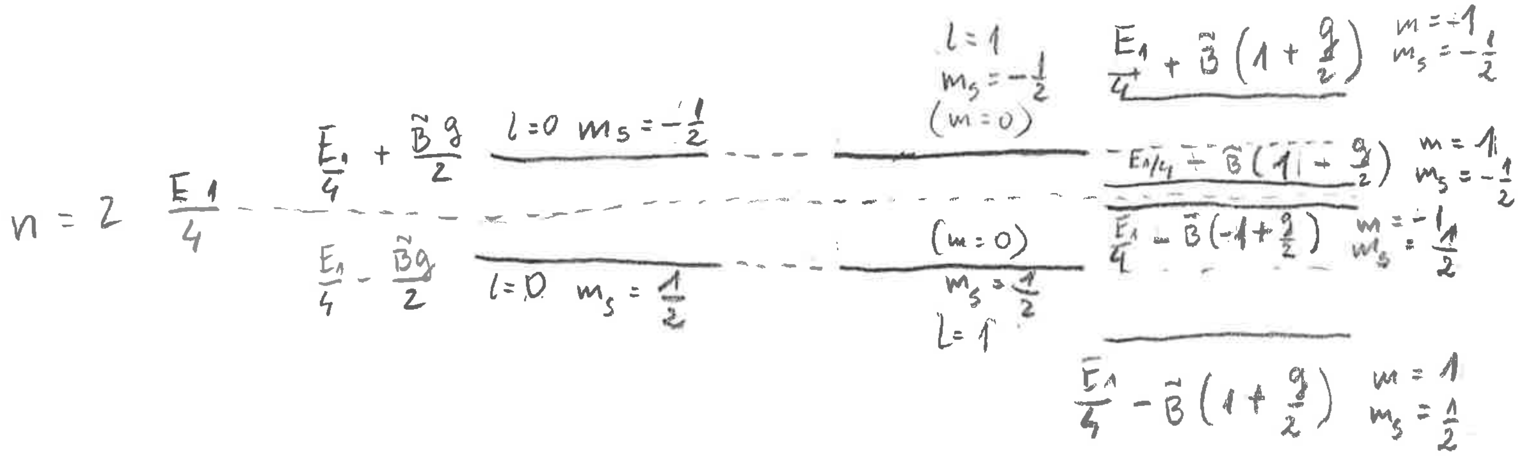
Der Störterm H_B ist diagonal in $|2\, l\, m\, m_s\rangle$:

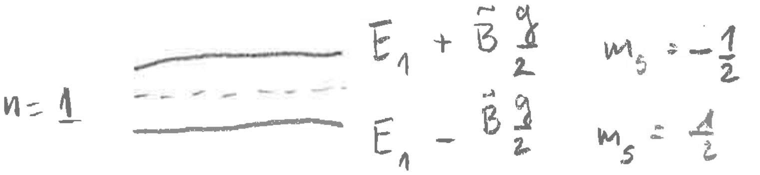
$$E_{2\, l=0}^{(1)} = \frac{E_1}{4} - \tilde{B} g m_s = \frac{E_1}{4} \mp \tilde{B} \frac{g}{2}$$

$$E_{2\, l=1}^{(1)} = \frac{E_1}{4} - \tilde{B}(m + g m_s) = \begin{cases} \frac{E_1}{4} \mp \tilde{B} \frac{g}{2} & m = 0 \\ \frac{E_1}{4} - \tilde{B}\left(1 \pm \frac{g}{2}\right) & m = 1 \\ \frac{E_1}{4} - \tilde{B}\left(-1 \pm \frac{g}{2}\right) & m = -1 \end{cases}$$

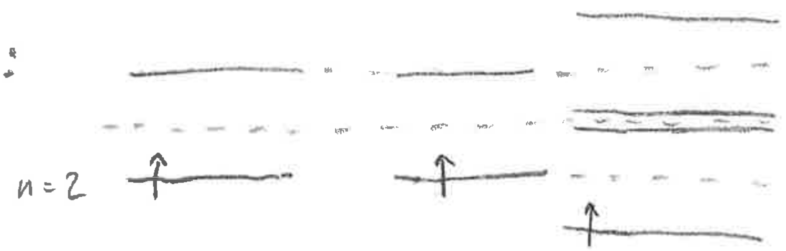
(2)

für $g = 2{,}002$; $\frac{g}{2} = 1{,}001$





b) 5 Elektronen :

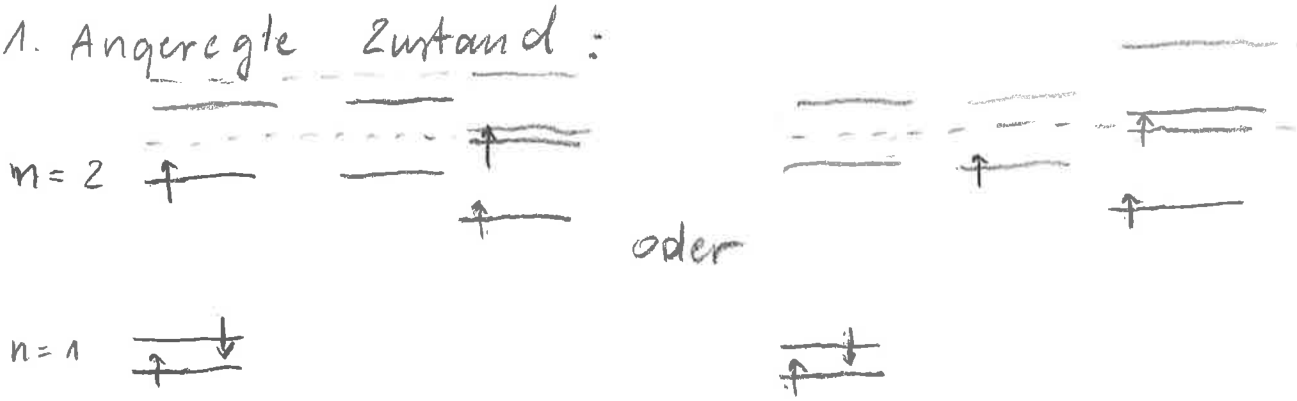


Grundzustand:

$c^\dagger_{210\uparrow}\, c^\dagger_{211\uparrow}\, c^\dagger_{200\uparrow}\, c^\dagger_{100\downarrow}\, c^\dagger_{100\uparrow} |vac\rangle$; $1s^2 2s^1 2p^2$

Nicht entartet ; $E_G = 2E_1 + \frac{E_1}{4} - \vec{B}(1+\frac{g}{2}) + 2\left(\frac{E_1}{4} - \frac{\vec{B} g}{2}\right) = \frac{11}{4}E_1 - \vec{B}\left(1+\frac{3g}{2}\right)$

1. Angeregte Zustand :



$c^\dagger_{21-1\uparrow}\, c^\dagger_{211\uparrow}\, c^\dagger_{200\uparrow}\, c^\dagger_{100\downarrow}\, c^\dagger_{100\uparrow} |vac\rangle$

$c^\dagger_{21-1\uparrow}\, c^\dagger_{210\uparrow}\, c^\dagger_{211\uparrow}\, c^\dagger_{100\downarrow}\, c^\dagger_{100\uparrow} |vac\rangle$

③ 1. Angeregte Zustand ist 2-fach entartet.

$$E_I = E_G + \tilde{B}\left(1-\frac{g}{2}\right) - \left(-\frac{\tilde{B}g}{2}\right) = E_G + \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta m = \pm 1}}{\tilde{B}}$$

c)

für $g = 2 \Rightarrow \frac{g}{2} = 1$

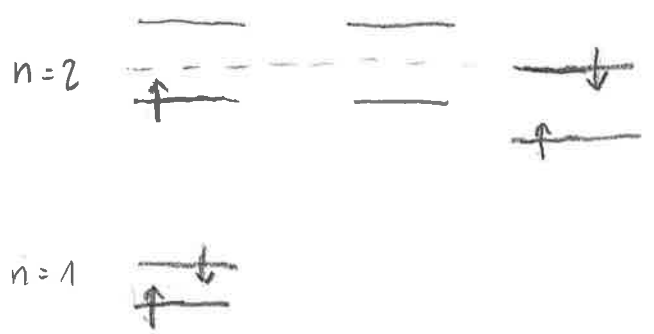
ad a)

die Skizze ändert sich nur indem jetzt sind die Zustände $|2\,1\,1\,-\tfrac{1}{2}\rangle$ und $|2\,1\,-1\,\tfrac{1}{2}\rangle$ entartet (weil $1-\frac{g}{2} = -1+\frac{g}{2} = 0$)

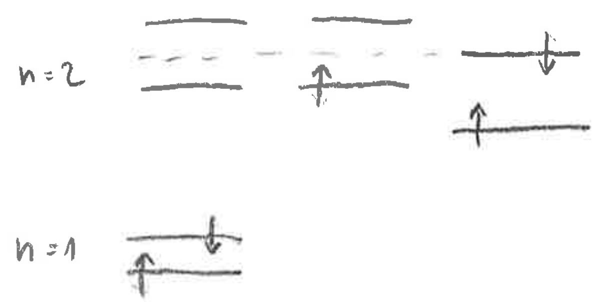
ad b)

Grundzustand bleibt gleich und nicht entartet.

Für 1. Angeregten Zustand gibt es 2 zusätzliche Möglichkeiten mit gleicher Energie:



und



$c^\dagger_{21-1\downarrow} c^\dagger_{211\uparrow} c^\dagger_{200\uparrow} c^\dagger_{100\downarrow} c^\dagger_{100\uparrow} |Vac\rangle$ $\qquad$ $c^\dagger_{21-1\downarrow} c^\dagger_{211\uparrow} c^\dagger_{210\uparrow} c^\dagger_{100\downarrow} c^\dagger_{100\uparrow} |Vac\rangle$

Also jetzt 4-fach entartet.

Energie bleibt $E_I = E_G + \tilde{B}$

mit $\Delta m = +1$ und $\Delta m_s = 0$

oder $\Delta m = 1$ und $\Delta m_s = -1$

4.) Theoriefragen

a) $H = U \sum_i \sum_{\substack{j,j'=1 \\ j\neq j'}}^{N} |i\downarrow\rangle_{j'} |i\uparrow\rangle_{j} \langle i\uparrow|_{j'} \langle i\downarrow|$

b)

	(i) Dirac Glg.	(ii) S-Glg
(I) $\vec{\Sigma}$	Kommutiert nicht	kommutiert
(II) $\vec{L}+\vec{\Sigma}$	Kommutiert	Kommutiert

Theoriefragen (für TEST A)

c) $|\psi(t=0)\rangle = |1\rangle$ mit $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ und $\langle x|1\rangle \propto 2x/x_0 \, e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x_0^2}}$

(i) $T \gg \frac{1}{\omega}$ $\Rightarrow$ Adiabatische Näherung anwendbar

$\Rightarrow$ $|\psi(t=t_1)\rangle$ wird im 1. angeregten Zustand von $H(t_1)$ sein $\equiv$ verschobener Harmonischer Oszillator

$$\Rightarrow \quad E(t_1) = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad ; \quad \langle x|\psi(t_1)\rangle \propto 2\frac{[x-f(t_1)a]}{x_0} e^{-\frac{[x-f(t_1)a]^2}{2x_0^2}}$$

(ii) $T \ll \frac{1}{\omega}$ $\Rightarrow$ Sudden Approximation wäre z.B. anwendbar falls $t_1 \gg T$ $\Rightarrow$ $H(t_1) \cong \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}|\psi(t=0)\rangle = \sum_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}\langle\hat{n}|\psi(t\overset{|1\rangle}{=}0)\rangle|\hat{n}\rangle$$

wobei $\langle\hat{n}|1\rangle$ wird im Allgemeinen (d.h. für beliebigen $\hat{n}$) nicht verschwinden.

Theoriefragen (für TEST A)

d) im WW. BILD

(i) $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = V_I(t)\, |\psi_I(t)\rangle = V(t)\, |\psi_I(t)\rangle$

→ In diesem speziellen Fall, da $[H_0, V(t)] = \emptyset$

$= g(t)\, L_z B_z |\psi_I(t)\rangle$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = g_0 \sin \omega t\, L_z B_z |\psi_I(t)\rangle$$

$$\Rightarrow\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_I(t) = g_0 L_z B_z \sin \omega t\, U_I(t)$$

$$U_I(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\left[\int_0^t \sin \omega t\right] g_0 L_z B_z} = e^{-\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1-\cos\omega t}{\omega}\right] g_0 L_z B_z}$$

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t)\, |\psi(t=0)\rangle = U_I(t)\, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\, |l=1, m=1\rangle + |l=1, m=0\rangle \Big]$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{i}{\cancel{\hbar}}\left[\frac{1-\cos\omega t}{\omega}\right] g_0 B_z \cancel{\hbar}}\, |l=1, m=1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\, |l=1, m=0\rangle\right]$$

(ii) $\langle L^2 \rangle_I(t) = \langle \psi_I(t) | L^2 | \psi_I(t)\rangle = \langle \psi_I(0)|\, U_I^\dagger(t)\, L^2\, U_I(t)\, |\psi(0)\rangle$

aber da $[U_I(t), L^2] \Rightarrow\ = \langle \psi(0) | L^2 | \psi(0)\rangle = \hbar^2 l(l+1)$

$= 2\hbar^2$

$$\langle L_z \rangle(t) = \langle \psi_I(t) | L_z | \psi_I(t)\rangle = \langle \psi(0) | L_z | \psi(0)\rangle$$

↳ wie oben, da $[U_I(t), L_z] = \emptyset$

$$= \frac{1}{2}\hbar$$