Musterlösung Verständnisfragen (Theorie-Aufgaben)

A1 a) (i) in $\{|\uparrow_x\rangle, |\downarrow_x\rangle\}$ Basis: $|\uparrow_x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

B2b)

dann in dieser Basis ist: $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) in $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$ Basis ist

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dann $\rho = |\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

A1 b)

B2c)

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 (x-a)^2 + |\alpha| (x-a)^4$$

sieht wie verschobener H.O. mit Korrektur aus, also z.B.

$$\psi(x) = A\, e^{-\lambda(x-a)^2}$$

wobei A ist durch Normierung gegeben und λ ist Variationsparameter.

Musterlösung Verständnisfragen (Theorie-Aufgaben)

A1 c) **B2d)** $H(t) = H_0 + \alpha(t) V \quad , [H_0, V] \neq 0$

(i) $|\psi(t)\rangle \neq e^{-\frac{i}{\hbar} H(t)\, t} |\psi_0\rangle$

gilt nicht, weil das ist nicht eine Lösung der SG $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$

Wenn H zeitunabhängig ist, d.h. $\alpha(t) = 1$, (i) ist der korrekte Ausdruck

(ii) $|\psi(t)\rangle \neq e^{-i/\hbar H_0 t} e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha(t) V t} |\psi_0\rangle$

das gilt nur Falls $[H_0, V] = 0$ und $\alpha(t) = 1$.
$\alpha(t) = 1$ allein macht den Ausdruck noch nicht korrekt!

(iii) $|\psi(t)\rangle = \underbrace{e^{-i/\hbar H_0 t}}_{U_0(t)} \underbrace{U_I(t) |\psi_0\rangle}_{|\psi_I(t)\rangle}$

dieser Ausdruck ist korrekt in alle Fälle.

Für $\alpha(t) = 1$: $|\psi(t)\rangle = U_0(t) |\psi_I(t)\rangle = \underbrace{U_0 U_I}_{U(t)} |\psi_0\rangle =$

$= U(t) |\psi_0\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ H \text{ zeitunabhängig}}}{=} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\psi_0\rangle$

(iii) reduziert sich zu (ii)

Musterlösung zu 1A) d) / 2B a)

$$R_\ell = e^{i\delta_\ell}\left(\cos(\delta_\ell)\, j_\ell(kr) - \sin(\delta_\ell)\, n_\ell(kr)\right)$$

i) aus $V(r) = \infty$ für $r \overset{\leq a}{< b}$ folgt $\Psi = 0$ für $r \overset{\leq a}{< b}$, da die Wellenfunktion stetig ~~s~~ sein muss, sind nur R_ℓ zulässig, die an $r = \overset{a}{b}$ 0 geben

ii) $\delta_{\ell=0}$ gesucht $\quad j_0 = \frac{\sin(\rho)}{\rho} \qquad n_0 = -\frac{\cos(\rho)}{\rho}$

$$R_0 = e^{i\delta_0}\left(\cos(\delta_0)\frac{\sin(kr)}{kr} + \sin(\delta_0)\frac{\cos(kr)}{kr}\right)\Big|_{r=\overset{a}{b}} = 0$$

$$\cos(\delta_0)\cdot\sin(k\overset{a}{b}) + \sin(\delta_0)\cos(k\overset{a}{b}) = 0$$

$$-\tan(k\overset{a}{b}) = \tan(\delta_0) \qquad \delta_0 = -k\overset{a}{b}$$

iii) $\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2}\sum_0^\infty (2\ell+1)\sin^2\delta_\ell$ bei $l=0$ abbrechen

$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2}\cdot\sin^2\delta_\ell$ für kleine $E \to$ kleine k

$\sigma_s \approx \frac{4\pi}{k^2}\cdot k^2 \overset{a^2}{b^2} \to 4\pi\overset{a^2}{b^2}$ 4-fachen klassischer Erwartungswert

Musterlösung Streutheorie (Born'sche Näherung) 1

A2 / B3

a) $$V(\vec r) = V_0 R_0\, \delta(r - R_0) \equiv V(r)$$

$$f(\theta,\varphi) = \frac{-2m}{\hbar^2} 2\pi^2\, \tilde V(\vec q) = \int \frac{d^3\vec r}{(2\pi)^3} e^{-i\vec q \vec r} V(\vec r) =$$

$$= \frac{-2m}{\hbar^2} \frac{\cancel{4}\pi^3}{(2\pi)^3} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\infty dr\, e^{iqr\cos\theta} r^2 V(r) =$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{\cancel{4}\pi^3}{(2\pi)^3} \int_{-1}^{1} du \underbrace{\int_0^\infty r^2 V(r) e^{iqru} dr}_{V(r) = V_0 R_0 \delta(r-R_0)} =$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{4\pi^3}{(2\pi)^3} \int_{-1}^{1} du\, V_0 R_0^3 e^{iqR_0 u} = -\frac{m}{\hbar^2} V_0 R_0^3 \underbrace{\int_{-1}^{1} du\, e^{iqR_0 u}}_{} =$$

$$\frac{1}{iqR_0}\left(e^{iqR_0} - e^{-iqR_0}\right) =$$

$$= \frac{2}{qR_0} \sin qR_0$$

$$= -\frac{2mV_0R_0^3}{\hbar^2} \frac{\sin qR_0}{qR_0}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2V_0^2R_0^6}{\hbar^4} \frac{\sin^2 qR_0}{(qR_0)^2} = \frac{4m^2V_0^2R_0^4}{\hbar^4 q^2} \sin^2 qR_0$$

mit $q = 2k \sin\frac{\Theta}{2}$

kleine Energien: ②

$$kR_0 \ll 1 \quad \Rightarrow \quad qR_0 \to 0$$

$$\frac{\sin qR_0}{qR_0} \cong 1 - \frac{(qR_0)^2}{3!} + O(qR_0)^4$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \xrightarrow[kR_0 \to 0]{} \frac{4m^2V_0^2R_0^6}{\hbar^4} \quad \text{(Winkel unabhängig)}$$

b)
$$|\Psi_{\vec{k}}^+\rangle = |\vec{k}\rangle + G^+(\vec{k})\,\mathcal{U}\,|\vec{k}\rangle + O(\mathcal{U}^2)$$

$$\langle\vec{r}|\Psi_{\vec{k}}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \underbrace{\langle\vec{r}|G^+(\vec{k})\,\mathcal{U}\,|\vec{k}\rangle}_{\frac{2m}{\hbar^2}\langle\vec{r}|G^+V|\vec{k}\rangle}$$

$$\langle\vec{r}|G^+V|\vec{k}\rangle = \int d^3r' \int d^3r'' \underbrace{\langle\vec{r}|G^+|\vec{r}'\rangle}_{-\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}} \underbrace{\langle\vec{r}'|V|\vec{r}''\rangle}_{V(\vec{r}')\delta^3(\vec{r}'-\vec{r}'')} \underbrace{\langle\vec{r}''|\vec{k}\rangle}_{e^{i\vec{k}\vec{r}''}} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\sqrt[3]{2\pi}} \int d^3r' \, \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{i\vec{k}\vec{r}'} V(\vec{r}')$$

Auswerten für $\vec{r}=0$:

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}=0) = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} - \frac{2m}{4\pi\hbar^2\sqrt[3]{2\pi}} \underbrace{\int d^3r' \, \frac{e^{ikr'}}{r'} e^{i\vec{k}\vec{r}'} V(\vec{r}')}_{2\pi \int_{-1}^{1} du \int_0^\infty dr' \, r'^2 \frac{e^{ikr'}}{r'} e^{ikr'u} V_0 R_0 \delta(r'-R_0)}$$

$u = \cos\Theta'$

$\vec{k}\vec{r}' = kr'\cos\Theta'$

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}=0) = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} - \frac{m V_0 R_0}{\hbar^2 \sqrt[3]{2\pi}} \int_{-1}^{1} du\, R_0\, e^{ikR_0} e^{ikR_0 u} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} - \frac{m V_0 R_0^2}{\hbar^2 \sqrt[3]{2\pi}} \frac{2 \sin kR_0}{kR_0} e^{ikR_0}$$

Für kleine Energien: $kR_0 \ll 1$

die Korrektur zu ebene Welle ist:

$$\frac{2 m V_0 R_0^2}{\hbar^2} \left(1 - \frac{(kR_0)^2}{3!} + o\left((kR_0)^4\right)\right)\left(1 + ikR_0 + o\left((kR_0)^2\right)\right)$$

Bornsche Näherung anwendbar wenn:

$$\frac{2 m V_0 R_0^2}{\hbar^2} \ll 1$$

$$\text{d.h.} \quad V_0 R_0^2 \ll \frac{\hbar^2}{2m}$$

(schwaches, kurzreichweitiges Potenzial)

Musterlösung 3A/4B

$$\mathcal{H} = \varepsilon |e\rangle\langle e| + \hbar\omega\left(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}\right) + \begin{matrix}\alpha(t)\\ f(t)\end{matrix}\left(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|\right)(a + a^\dagger)$$

a) Eigenzstd. und Eigenenergien ohne Störung 4 Punkte

Eigenzstd:

$|e\rangle \otimes |n\rangle$ für alle n Energien: $\varepsilon + (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega$

$|g\rangle \otimes |n\rangle$ für alle n $(n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega$

b) $t=0$ System in GS: $|g\rangle \otimes |\emptyset\rangle$ 4 Punkte

Störung: $(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)(a+a^\dagger)\,|g\rangle \otimes |\emptyset\rangle = |e\rangle \otimes |1\rangle \rightarrow$ Übergang nur in diesen Zstd.

Übergangsamplitude $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt' \begin{matrix}\alpha(t')\\ f(t')\end{matrix} \cdot e^{i\left((1+\frac{1}{2})\hbar\omega + \varepsilon\right)t'} \cdot e^{-i\left(\frac{1}{2}\hbar\omega\right)t'} =$

$$\mathcal{C} \cdot \int_0^t \underset{a}{t'}\, \underset{b'}{e^{i(\hbar\omega+\varepsilon)t'}}\, dt' \quad \text{mit} \quad \mathcal{C} = \frac{\lambda}{i\hbar}\, \frac{1}{T} / \frac{1}{\tau}$$

$$= \mathcal{C} \cdot \left\{ \left(t' \cdot \frac{e^{i(\hbar\omega+\varepsilon)t'}}{i(\hbar\omega+\varepsilon)}\right)\Big|_0^t - \int_0^t \frac{e^{i(\hbar\omega+\varepsilon)t'}}{i(\hbar\omega+\varepsilon)}\, dt' \right\} =$$

$$\mathcal{C}\left\{ \frac{i(\hbar\omega+\varepsilon)t\, e^{i(\hbar\omega+\varepsilon)t} - e^{i(\hbar\omega+\varepsilon)t} + 1}{-(\hbar\omega+\varepsilon)^2} \right\} \Rightarrow \quad |\Psi_I(t)\rangle = |g,0\rangle + \mathcal{A}(t)\,|e,1\rangle$$

c) einzige mögliche Besetzung ergibt sich aus $\psi^{(1)} \Rightarrow n=1$ 2 Punkte

$$P(n=1) = |\mathcal{C}|^2 \cdot \frac{\left(i(\hbar\omega+\varepsilon)t\, e^{i(\hbar\omega+\varepsilon)t} - e^{i(\hbar\omega+\varepsilon)t} + 1\right)\left(-i(\hbar\omega+\varepsilon)t\, e^{-i(\hbar\omega+\varepsilon)t} - e^{-i(\hbar\omega+\varepsilon)t} + 1\right)}{(\hbar\omega+\varepsilon)^4}$$

$$= \frac{(\hbar\omega+\varepsilon)^2 t^2 + i(\hbar\omega+\varepsilon)t\left(e^{i(\hbar\omega+\varepsilon)t} - e^{-i(\hbar\omega+\varepsilon)t}\right) - \left(e^{i(\hbar\omega+\varepsilon)t} + e^{-i(\hbar\omega+\varepsilon)t}\right) + 2}{(\hbar\omega+\varepsilon)^4}$$

d)* Schnelles ausschalten → „sudden approx." → 4* Punkte
Zustand ändert sich gegenüber c) nicht
da $|e\rangle \otimes |1\rangle$ ein Eigenzustand von $\mathcal{H}_0$ → ändert sich auch später nicht
$P(n=1)$ bleibt konstant

e) Wann adiabatisch? 3 Punkte

Keine „Energiecrossings" → λ sollte klein gegenüber typischen Energieskalen des Systems sein:

$\lambda \ll |\hbar\omega - \varepsilon|$ oder $|\hbar\omega|$ oder $|\varepsilon|$ oder $|\hbar\omega + \varepsilon|$

T/τ muss groß gegenüber typischen Zeitskalen des Systems sein.

$T/\tau \gg \frac{1}{\omega}$ oder $\frac{1}{\varepsilon/\hbar}$ oder $\frac{1}{\hbar\omega - \varepsilon/\hbar}$

Musterlösung 4A/1B

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 2/5 & \sqrt{6}/5 \\ \sqrt{6}/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 & \sqrt{\rho_1\rho_2} \\ \sqrt{\rho_1\rho_2} & \rho_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{matrix} \rho_1 = \frac{1}{4} \\ \rho_2 = \frac{3}{4} \end{matrix} \Bigg/ \begin{matrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{matrix}$$

a) beschreibt ρ_0 reinen Zustand? 2 Punkte

$$\rho_0^2 = \rho_0 \rightarrow \text{reiner Zustand}$$

b) Erwartungswert der Messung von 4 Punkte

$$\sigma_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \emptyset & 1 \\ 1 & \emptyset \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$Tr\left(\begin{pmatrix} \rho_1 & \sqrt{\rho_1\rho_2} \\ \sqrt{\rho_1\rho_2} & \rho_2 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \emptyset & 1 \\ 1 & \emptyset \end{pmatrix}\right) = Tr\, \frac{\hbar}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\rho_1\rho_2} & \times \\ \times & \sqrt{\rho_1\rho_2} \end{pmatrix} = \hbar \cdot \sqrt{\rho_1\rho_2}$$

$$= \hbar \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} / \frac{\sqrt{6}}{5} = \langle \sigma_x \rangle$$

$$Tr\left(\begin{pmatrix} \rho_1 & \sqrt{\rho_1\rho_2} \\ \sqrt{\rho_1\rho_2} & \rho_2 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \emptyset & -i \\ i & \emptyset \end{pmatrix}\right) = Tr\, \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -i\sqrt{\rho_1\rho_2} & \times \\ \times & i\sqrt{\rho_1\rho_2} \end{pmatrix} = \emptyset = \langle \sigma_y \rangle$$

c) Messung von S_z wird durchgeführt. Mögliche Ergebnisse, Wahrscheinlichkeiten, sowie ρ nach der Messung 5 Punkte

Mögliche Messwerte: $\pm \frac{\hbar}{2}$

Wahrscheinlichkeiten: $\frac{1}{4} / \frac{2}{5} \left(+\frac{\hbar}{2}\right) / \frac{3}{4} / \frac{3}{5} \left(-\frac{\hbar}{2}\right)$

Dichtematrix nach der Messung: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(+\frac{\hbar}{2}\right) / \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(-\frac{\hbar}{2}\right)$