Musterlösung A1/B3

$$H = \underbrace{-t \sum_\sigma \sum_{i=1}^{M} \left(c_{i\sigma}^+ c_{i+1\sigma} + c_{i\sigma}^+ c_{i-1\sigma} \right)}_{H_{kin}} + \underbrace{U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}}_{H_U}$$

a) $t > 0$, $U = 0$, $M = 4$: $H = H_{kin}$

$$\tilde{c}_{k\sigma} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_i e^{ikx_i} c_{i\sigma} \quad ; \; x_i = ia$$

inverse : $$c_{i\sigma} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k e^{-ikx_i} \tilde{c}_{k\sigma}$$

$$c_{M\sigma} = c_{0\sigma} \Rightarrow e^{-ikMa} \overset{!}{=} e^{-ika\cdot 0} = 1$$

$$kMa = 2\pi \cdot m$$

$$k = \frac{2\pi}{Ma} \cdot m$$

$$m = 0, \ldots, M-1$$

$$H_{kin} = -t \sum_\sigma \sum_k \sum_{k'} \Big(\frac{1}{M} \sum_i \underbrace{e^{ikx_i} e^{-ik'x_{i+1}}}_{e^{i(k-k')ia} e^{-ik'a}} \tilde{c}_{k\sigma}^+ \tilde{c}_{k'\sigma} +$$

$$+ \frac{1}{M} \sum_i \underbrace{e^{ikx_i} e^{-ik'x_{i-1}}}\, \tilde{c}_{k\sigma}^+ \tilde{c}_{k'\sigma} \Big) =$$

$$\Big\{ \quad \underbrace{\frac{1}{M} \sum_i e^{i(k-k')ia}}_{\delta_{kk'}} e^{ik'a}$$

$$= -t \sum_\sigma \sum_{kk'} \left(\delta_{kk'} e^{-ik'a} + \delta_{kk'} e^{ik'a} \right) \tilde{c}_{k\sigma}^+ \tilde{c}_{k'\sigma} = -2t \sum_{k\sigma} \cos(ka) \tilde{c}_{k\sigma}^+ \tilde{c}_{k\sigma}$$

$$= \sum_{k\sigma} \epsilon_k \tilde{c}_{k\sigma}^+ \tilde{c}_{k\sigma} \qquad \text{mit} \quad \varepsilon_k = -2t \cos(ka); \; k = \frac{2\pi m}{Ma}$$

Energieeigenwerte für $M=4$:

$k=0 \qquad \varepsilon_{k=0} = -2t$

$k=\frac{\pi}{2a} \qquad \varepsilon_{k=\frac{\pi}{2a}} = 0$

$k=\frac{\pi}{a} \qquad \varepsilon_{k=\frac{\pi}{a}} = 2t$

$k=\frac{3\pi}{2a} \qquad \varepsilon_{k=\frac{3\pi}{2a}} = 0$

Grundzustand: (i) ein Elektron: $\tilde{c}^+_{k=0\sigma}|0\rangle$

$E=-2t$, 2-fach entartet (Spin, $\sigma=\uparrow,\downarrow$)

(ii) 4 Elektronen

$E=-4t$:

6-fach entartet

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{c}^+_{k=\frac{3\pi}{2a}\sigma}\tilde{c}^+_{k=\frac{\pi}{2a}\sigma'}\tilde{c}^+_{k=0\downarrow}\tilde{c}^+_{k=0\uparrow}|0\rangle \\ \tilde{c}^+_{k=\frac{\pi}{2a}\downarrow}\tilde{c}^+_{k=\frac{\pi}{2a}\uparrow}\tilde{c}^+_{k=0\downarrow}\tilde{c}^+_{k=0\uparrow}|0\rangle \\ \tilde{c}^+_{k=\frac{3\pi}{2a}\downarrow}\tilde{c}^+_{k=\frac{3\pi}{2a}\uparrow}\tilde{c}^+_{k=0\downarrow}\tilde{c}^+_{k=0\uparrow}|0\rangle \end{array}\right.$$

b) $H = H_U = \sum_i U n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} = \sum_i H_i^{at}$

Eigenzustände von H_i^{at}: $\varepsilon_1 = 0 \qquad |0\rangle$

$N_i = 1$ El. $\quad \varepsilon_{2,3}=0 \qquad c^+_{i\sigma}|0\rangle$

$N_i = 2$ El. $\quad \varepsilon_4 = U \qquad c^+_{i\uparrow}c^+_{i\downarrow}|0\rangle$

(i) ein Elektron: $E=0$ Grundzustand $c^+_{i\sigma}|0\rangle$

2 (Spin) × 4 (Gitterplatz) = 8-fach entartet

(ii) 4 Elektronen: $E=0 \qquad c^+_{1\sigma_1}c^+_{2\sigma_2}c^+_{3\sigma_3}c^+_{4\sigma_4}|0\rangle$

Ein Elektron auf jedem Gitterplatz mit beliebigem Spin $2^4 = 16$-fach entartet

c) $t > 0,\ U > 0$ (3)

$$[H_{kin}, \gamma] = \Big[-t\sum_{i,\sigma}\left(c^+_{i\sigma}c_{i+1\sigma} + c^+_{i\sigma}c_{i-1\sigma}\right)\sum_j(-1)^j c^+_{j\uparrow}c^+_{j\downarrow}\Big] =$$

$$= -t\sum_{i,j,\sigma}(-1)^j\Big(\underbrace{\overset{(1)}{c^+_{i\sigma}c_{i+1\sigma}c^+_{j\uparrow}c^+_{j\downarrow}} - \overset{(2)}{c^+_{j\uparrow}c^+_{j\downarrow}c^+_{i\sigma}c_{i+1\sigma}}}_{} + \overset{(3)}{c^+_{i\sigma}c_{i-1\sigma}c^+_{j\uparrow}c^+_{j\downarrow}} - \overset{(4)}{c^+_{j\uparrow}c^+_{j\downarrow}c^+_{i}c_{i-1}}\Big)$$

für $i=j$: $(c^+_{i\sigma})^2 = 0$ \
$i \neq j$ und $i+1 \neq j$ } verschwindet

nicht null Beiträge nur von $j = i+1$ oder $j = i-1$ hier

Nur Term (1) : $c^+_{i\sigma}\underbrace{c_{i+1\sigma}c^+_{i+1\uparrow}}_{\delta_{\sigma\uparrow} - c^+_{i+1\uparrow}c_{i+1\sigma}}c^+_{i+1\downarrow}$

$$c^+_{i\uparrow}c^+_{i+1\downarrow} - c^+_{i\sigma}c^+_{i+1\uparrow}\underbrace{c_{i+1\sigma}c^+_{i+1\downarrow}}_{\delta_{\sigma\downarrow} - c^+_{i+1\downarrow}c_{i+1\sigma}}$$

$$-c^+_{i\downarrow}c^+_{i+1\uparrow} + \underbrace{c^+_{i\sigma}c^+_{i+1\uparrow}c^+_{i+1\downarrow}c_{i+1\sigma}}_{(-1)^2\ \to\ c^+_{i+1\uparrow}c^+_{i+1\downarrow}c^+_{i\sigma}c_{i+1\sigma}}$$

(ist gleich (2) mit „+" also vereinfacht sich)

Aus (1) und (2)

$c^+_{i\uparrow}c^+_{i+1\downarrow} - c^+_{i\downarrow}c^+_{i+1\uparrow}$

Ähnlich aus (3) und (4) : $c^+_{i\uparrow}c^+_{i-1\downarrow} - c^+_{i\downarrow}c^+_{i-1\uparrow} = c^+_{i-1\uparrow}c^+_{i\downarrow} - c^+_{i-1\downarrow}c^+_{i\uparrow}$

Zusammen:

$$[H_{kin}, \gamma] = -t\sum_i\Big[(-1)^{i+1}\left(c^+_{i\uparrow}c^+_{i+1\downarrow} - c^+_{i\downarrow}c^+_{i+1\uparrow}\right) + (-1)^{i-1}\underbrace{\left(c^+_{i-1\uparrow}c^+_{i\downarrow} - c^+_{i-1\downarrow}c^+_{i\uparrow}\right)}_{\text{hier verschieben wir die Summe : } i \to i+1}\Big]$$

$$= 0$$

(4)

$$[H_u,\gamma] = U\sum_i\sum_j (-1)^j \underbrace{[n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}, c^+_{j\uparrow} c^+_{j\downarrow}]}_{\text{nur } i=j \text{ gibt Beiträge}} = U\sum_i (-1)^i [n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}, c^+_{i\uparrow} c^+_{i\downarrow}]$$

$$[n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}, c^+_{i\uparrow} c^+_{i\downarrow}] = n_{i\uparrow}[n_{i\downarrow}, c^+_{i\uparrow} c^+_{i\downarrow}] + [n_{i\uparrow}, c^+_{i\uparrow} c^+_{i\downarrow}] n_{i\downarrow} =$$

$$= n_{i\uparrow}\Big(\underbrace{[n_{i\downarrow}, c^+_{i\uparrow}]}_{=0} c^+_{i\downarrow} + c^+_{i\uparrow} \underbrace{[n_{i\downarrow}, c^+_{i\downarrow}]}_{\underbrace{c^+_{i\downarrow}\underbrace{c_{i\downarrow} c^+_{i\downarrow}}_{1-c^+_{i\downarrow}c_{i\downarrow}} - c^+_{i\downarrow}\underbrace{c^+_{i\downarrow} c_{i\downarrow}}_{=0}}_{[n_{i\downarrow}, c^+_{i\downarrow}] = c^+_{i\downarrow}}}\Big) + \Big([n_{i\uparrow}, c^+_{i\uparrow}] c^+_{i\downarrow} + c^+_{i\uparrow}\underbrace{[n_{i\uparrow}, c^+_{i\downarrow}]}_{=0}\Big) n_{i\downarrow}$$

$$= \underbrace{n_{i\uparrow} c^+_{i\uparrow}}_{\underbrace{c^+_{i\uparrow} c_{i\uparrow} c^+_{i\uparrow}}_{(1-c_{i\uparrow}c^+_{i\uparrow})c^+_{i\uparrow}}} c^+_{i\downarrow} + c^+_{i\uparrow} \underbrace{c^+_{i\downarrow} n_{i\downarrow}}_{\underbrace{c^+_{i\downarrow} c^+_{i\downarrow} c_{i\downarrow}}_{=0}} = c^+_{i\uparrow} c^+_{i\downarrow}$$

$$[H_u,\gamma] = U\sum_i (-1)^i c^+_{i\uparrow} c^+_{i\downarrow} = U\gamma \Rightarrow [H,\gamma] = U\gamma$$

D. h. $H\gamma - \gamma H = U\gamma \Rightarrow H\gamma = \gamma H + U\gamma$

$|\varphi\rangle$ - Eigenzustand mit E_φ : $H\gamma|\varphi\rangle = E_\varphi \gamma|\varphi\rangle + U\gamma|\varphi\rangle$

$\gamma|\varphi\rangle$ ist Eigenzustand mit Energie $E_\varphi + U$

$\gamma^n|\varphi\rangle$ is auch Eigenzustand $\Rightarrow$ Leiteroperator!

d) z.B. aus c: $\gamma|0\rangle$ mit Energie $E = 0 + U = U$ (5)

oder aus a) für Elektronen mit gleichem Spin (dann sind sie nichtwechselwirkend)

$$c^\dagger_{k\sigma} c^\dagger_{k'\sigma} |0\rangle \text{ mit Energie } E = \varepsilon_k + \varepsilon_{k'}$$

$k' \neq k$

• Verständnis-Frage (A2)

a) Die Prozedur, um die Kontinuitätsgleichung aus der (freien) Dirac Gl. herzuleiten, ist ähnlich wie im Fall der Schrödinger Gl.

$$*)\quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,t) = \left[c\frac{\hbar}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m c^2\right]\Psi(r,t)$$

mit $\Psi(r,t) = \begin{pmatrix}\psi_1(r,t)\\ \psi_2(r,t)\\ \psi_3(r,t)\\ \psi_4(r,t)\end{pmatrix}$ und $\rho(r,t) = \left(\Psi^{*T}\Psi\right) = \sum_{i=1}^{4}\psi_i^*(r,t)\psi_i(r,t)$

$\Rightarrow$

$$(\Psi^*)^T \times i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = (\Psi^*)^T\left[c\frac{\hbar}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m c^2\right]\Psi$$

die Komplexe Konjugiert Relation

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*)^T\Psi = -c\frac{\hbar}{i}\left[\vec{\nabla}(\Psi^*)^T\cdot\vec{\alpha}^{*T} + mc^2(\Psi^*)^T\beta^T\right]\Psi$$

Da $(\vec{\alpha}^*)^T = (\vec{\alpha})^\dagger = \vec{\alpha}$ und $\beta^T = \beta$ (reel), ergibt diese Differenz:

$$i\cancel{\hbar}\underbrace{\left[(\Psi^*)^T\frac{\partial}{\partial t}\Psi + \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*)^T\Psi\right]}_{\frac{\partial}{\partial t}\left[(\Psi^*)^T\Psi\right]} = c\frac{\cancel{\hbar}}{i}\underbrace{\left[\vec{\nabla}(\Psi^*)^T\cdot\vec{\alpha}\,\Psi + (\Psi^*)^T\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\Psi\right]}_{\vec{\nabla}\cdot\left[(\Psi^*)^T\vec{\alpha}\,\Psi\right]}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(\Psi^*)^T\Psi\right] = \vec{\nabla}\cdot\left[(\Psi^*)^T\vec{\alpha}\,\Psi\right]$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left[(\Psi^*)^T\Psi\right]}_{\rho(r,t)} = -\vec{\nabla}\cdot\underbrace{\left[c(\Psi^*)^T\vec{\alpha}\,\Psi\right]}_{\vec{j}(r,t)}$$

Musterlösung A2

b) $\{c_i^+, c_j^+\} = 0 \Leftrightarrow c_i^+ c_j^+ + c_j^+ c_i^+ = 0 \Rightarrow c_i^+ c_i^+ \cdot 2 = 0$

$\Rightarrow$ Wir können keiner WF (auch nicht dem Vakuum) 2 Fermionen im gleichen Zustand i hinzufügen.
$\Rightarrow$ keine Doppelbesetzung, es gilt das Pauliprinzip

c) Basis

$c_{1\uparrow}^+ c_{1\downarrow}^+|VAC\rangle,\ c_{1\uparrow}^+ c_{2\downarrow}^+|VAC\rangle,\ c_{1\downarrow}^+ c_{2\uparrow}^+|VAC\rangle,\ c_{2\uparrow}^+ c_{2\downarrow}^+|VAC\rangle$

Matrix
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Nullen folgen aus der Struktur von H
(man braucht Elektronen auf 2 sites und der spin ändert sich)

② Vertauschen mit 3 Operatoren
$\Rightarrow -1$ Vorzeichen

$$\langle VAC | c_{2\uparrow} c_{1\downarrow} H c_{2\uparrow}^+ c_{2\downarrow} c_{1\downarrow}^+ \underbrace{c_{1\uparrow} c_{1\uparrow}^+}_{1 - \underbrace{c_{1\uparrow}^+ c_{1\uparrow}}_{=0 \text{ auf } |VAC}} c_{2\downarrow}^+ |VAC\rangle$$

① 1 − $c_{1\uparrow}^+ c_{1\uparrow}$ =0 auf |VAC

③ Vertauschen
$\Rightarrow -1$

$$= (-1)^2 \langle VAC | J c_{1\downarrow} \underbrace{\underbrace{c_{2\uparrow} c_{2\uparrow}^+}_{1 - \underbrace{c_{2\uparrow}^+ c}_{0}} \underbrace{c_{2\downarrow} c_{2\downarrow}^+}_{1 - \underbrace{c_{2\downarrow}^+ c_{2\downarrow}}_{0}}}_{1 - \underbrace{c_{1\downarrow}^+ c_{1\downarrow}}_{0}} c_{1\downarrow}^+ |VAC\rangle = J$$

Eigenwerte

Eigenvektoren

$$0: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad +J: \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -J: \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

H beschreibt die $S_1^+S_2^- + S_1^-S_2^+$ bzw. $S_1^xS_2^x + S_1^yS_2^y$ Komponenten der Spin-Spin WW $J\vec{S}_1\vec{S}_2$. Für letztere hat das Singulett die niedrigste Energie und dies ist auch für die Beschränkung auf $S_1^xS_2^x + S_1^yS_2^y$ der Fall (EW Singulett: $-J$), entsprechend hat die $S_z=0$ Komponente des Tripletts die größte Energie $+J$ (dies wäre auch die Energie für $J\vec{S}_1\vec{S}_2$).

d) $$S[x(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L[\dot{x}(t), x(t), t] \overset{V=0}{=} \int_{t_i}^{t_f} dt\, \tfrac{1}{2} m \left(\dot{x}(t)\right)^2$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} dt\, \tfrac{1}{2} m \left((x_f - x_i) \frac{2(t-t_i)}{(t_f-t_i)^2} \right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2} m (x_f - x_i)^2 \frac{2^2 \cdot \frac{1}{3} (t-t_i)^3}{(t_f-t_i)^4} \Bigg|_{t_f}^{t_i}$$

$$= \tfrac{1}{2} m \frac{(x_f-x_i)^2}{(t_f-t_i)} \frac{4}{3}$$

Für klass. Pfad: $x_{class}(t) = x_i + (x_f - x_i)\dfrac{(t-t_i)}{(t_f-t_i)}$

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \tfrac{1}{2} m (x_f - x_i)^2 \cdot \frac{1}{(t_f-t_i)} = \tfrac{1}{2} m \frac{(x_f-x_i)^2}{t_f-t_i}$$

$$\frac{S[x(t)] - S[x_{klass}(t)]}{\hbar} = \tfrac{1}{2} m \frac{(x_f-x_i)^2}{t_f-t_i} \frac{1}{3} \lesssim \pi$$

oder $\pi/2$

$$\Rightarrow \text{bis zu } \hbar \gtrsim \tfrac{1}{2} \frac{m}{\pi} \frac{(x_f-x_i)^2}{t_f-t_i} \frac{1}{3}$$

A3 | B4

Green'sche Funktion der statischen Klein-Gordon Gleichung

$$(\Delta - m^2)\Psi = \frac{B}{\alpha}\delta^{(3)}(r)$$

Fourier-Transformation:

$$\Psi(r) = \int d^3k \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{r}} \tilde{\Psi}(k)$$

Gesamte Gleichung mit $e^{-i\vec{k}'\vec{r}}$ multiplizieren, über alle Orte integrieren

$$\iint (-k^2 - m^2) \frac{1}{(2\pi)^3} d^3k \underbrace{e^{i\vec{k}\vec{r}} \tilde{\Psi}(k) e^{-i\vec{k}'\vec{r}} d^3r}_{\delta^{(3)}(k-k')} = \frac{B}{\alpha} \cdot 1$$

$$(-k'^2 - m^2)\tilde{\Psi}(k') = \frac{B}{\alpha}$$

$$\tilde{\Psi}(k') = \frac{-\frac{B}{\alpha}}{k'^2 + m^2}$$

Rücktransformation:

$$\Psi(r) = \int d^3k \frac{1}{(2\pi)^3} e^{ikr} \frac{-\frac{B}{\alpha}}{k^2+m^2}$$

→ angepasste Kugelkoordinaten mit θ als Winkel zwischen r & k:

$$\Psi(r) = \left(-\frac{B}{\alpha}\right)\int_0^\infty dk \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \cdot k^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2+m^2} \cdot e^{ikr(\cos\theta)} =$$

$\cos(\theta) = u$

$-\sin(\theta)d\theta = du$

$$\left(-\frac{B}{\alpha}\right)\int_0^\infty dk \int_1^{-1} du (-1) k^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2+m^2} e^{ikru} =$$

$$\left(-\frac{B}{\alpha}\right)\int_0^\infty dk \frac{k^2}{ikr} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2+m^2} \underbrace{\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right)}_{2i\sin(kr)} =$$

$$\left(-\frac{B}{\alpha}\right)\int_{-\infty}^\infty dk \frac{k}{r} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2+m^2} \frac{\cancel{2}\sin(kr)}{\cancel{2}} =$$

$$\left(-\frac{B}{\alpha}\right)\int_{-\infty}^\infty dk \frac{k}{r} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2+m^2} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2i}$$

→ oberer Hilfsweg harmlos

→ unterer Hilfsweg harmlos

$$\frac{1}{k^2+m^2} = \frac{1}{(k+im)(k-im)}$$

$k = -im$ als Pol

$k = im$ als Pol

$$\left(-\frac{B}{\alpha}\right)\left[2\pi i \frac{im}{r} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2im} \cdot \frac{e^{-mr}}{2i} + 2\pi i \frac{-im}{r} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{-2im} \frac{e^{-mr}}{2i}\right]$$

$$\left(-\frac{B}{\alpha}\right) \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}$$

d)

Interpretation: Propagator für langreichweitige WW (Coulomb)

4a / 2b

a) Elektronenspin eine Erhaltungsgröße der Dirac-Gleichung?

$$H_{Dirac} = \left(c \cdot \begin{pmatrix} \emptyset & \sigma_i \\ \sigma_i & \emptyset \end{pmatrix} \cdot p_i + \beta m c^2 \right) \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & \emptyset \\ \emptyset & -1 \end{pmatrix}$$

Spin-Operator $= \begin{pmatrix} \sigma_j & \emptyset \\ \emptyset & \sigma_j \end{pmatrix}$ → Kommutator bestimmen (Faktor $\frac{\hbar}{2}$ in Spin-Operator vernachl.)

$$\left[H_{Dirac}, \begin{pmatrix} \sigma_j & \emptyset \\ \emptyset & \sigma_j \end{pmatrix} \right] =$$

$$c \cdot p_i \cdot \begin{pmatrix} \emptyset & \sigma_i \\ \sigma_i & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_j & \emptyset \\ \emptyset & \sigma_j \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} 1 & \emptyset \\ \emptyset & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_j & \emptyset \\ \emptyset & \sigma_j \end{pmatrix} -$$

$$c \cdot p_i \cdot \begin{pmatrix} \sigma_j & \emptyset \\ \emptyset & \sigma_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \emptyset & \sigma_i \\ \sigma_i & \emptyset \end{pmatrix} - mc^2 \begin{pmatrix} \sigma_j & \emptyset \\ \emptyset & \sigma_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \emptyset \\ \emptyset & -1 \end{pmatrix} =$$

$$c \cdot p_i \cdot \left[\begin{pmatrix} \emptyset & \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i \\ \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i & \emptyset \end{pmatrix} \right] + mc^2 \cdot \left[\begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \right] =$$

$$c \cdot p_i \cdot \cancel{i}\, 2 \cdot \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \emptyset & \sigma_k \\ \sigma_k & \emptyset \end{pmatrix} \neq \emptyset$$ → Spins sind im Allgemeinen keine Erhaltungsgrößen

---

b) Ruhendes Elektron mit $\sigma_z = \hbar/2$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot e^{-\frac{mc^2}{\hbar} \cdot t}$$

mit $\sigma_z = -\frac{\hbar}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot e^{-\frac{mc^2}{\hbar} \cdot t}$$

A) $\sigma_y = +\frac{\hbar}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot e^{-\frac{mc^2}{\hbar} t}$$

B) $\sigma_y = -\frac{\hbar}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot e^{-\frac{mc^2}{\hbar} t}$$

---

c) Zustände müssen in bewegte Lösungen der Dirac-Gleichung übergehen:

$$N \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \emptyset \\ \frac{p_0 c}{E + mc^2} \\ \emptyset \end{pmatrix} \cdot e^{i \frac{p_0 z'}{\hbar}} e^{-i \frac{E}{\hbar} t'} \qquad N \cdot \begin{pmatrix} \emptyset \\ 1 \\ \emptyset \\ -\frac{p_0 c}{E + mc^2} \end{pmatrix} \cdot e^{i \frac{p_0 z'}{\hbar}} e^{-i \frac{E}{\hbar} t'}$$

mit $E = + \sqrt{m^2 c^4 + p_0^2 c^2}$

d) Ursprüngliche σ_y-Eigenfunktion kann als Summe von σ_z-Eigenfunktionen geschrieben werden:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{z\uparrow} \pm i\psi_{z\downarrow}\right)$$

Muss als Summe transformieren:

$$\psi_{\sigma_y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ \frac{pc}{E+mc^2} \\ \mp i \frac{pc}{E+mc^2} \end{pmatrix} \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t'} \cdot e^{\frac{i p_0 z'}{\hbar}} \cdot N$$

→ Erwartungswerte einer σ_{xyz}-Messung → zeitunabhängig, denn Zeitentwicklungsfaktoren kürzen sich:

$$N^{-2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \\ \frac{pc}{E+mc^2} \\ \pm i \frac{pc}{E+mc^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ \frac{pc}{E+mc^2} \\ \mp i \frac{pc}{E+mc^2} \end{pmatrix} = 1 + \frac{p^2c^2}{(E+mc)^2} = \frac{2E}{E+mc^2}$$

$$\frac{pc}{E+mc^2} = \mathcal{A}$$

$$\langle \sigma_x \rangle = \frac{E+mc^2}{2E} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \\ \mathcal{A} \\ \pm i\mathcal{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ \mathcal{A} \\ \mp i\mathcal{A} \end{pmatrix} \cdot \frac{\hbar}{2} = 0$$

$$\langle \sigma_z \rangle = \frac{E+mc^2}{2E} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \\ \mathcal{A} \\ \pm i\mathcal{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ \mathcal{A} \\ \mp i\mathcal{A} \end{pmatrix} \cdot \frac{\hbar}{2} = 0$$

$$\langle \sigma_y \rangle = \frac{E+mc^2}{2E} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \\ \mathcal{A} \\ \pm i\mathcal{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ \mathcal{A} \\ \mp i\mathcal{A} \end{pmatrix} \cdot \frac{\hbar}{2} =$$

$$\frac{E+mc^2}{2E} \cdot \left(\pm\left(1 - \mathcal{A}^2\right)\right) \cdot \frac{\hbar}{2} =$$

$$\pm \frac{\hbar}{2}\left(\frac{\cancel{E+mc^2}}{2E} \cdot \frac{(E+mc^2)^2 - p^2c^2}{(E+mc^2)^2}\right) = \pm \frac{\hbar}{2} \cdot \left(\frac{E^2 + 2Emc^2 + m^2c^4 - p^2c^2}{2E(E+mc^2)}\right)$$

$$\pm \frac{\hbar}{2}\left(\frac{\cancel{2}\cancel{(E+mc^2)} \cdot mc^2}{\cancel{2} \cdot E \cdot \cancel{(E+mc^2)}}\right) = \pm \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{mc^2}{E}$$