Technische Universität Wien

Prof. A. Toschi, Prof. K. Held, Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch, DI T. Ribic

4. Plenum zur Quantentheorie II

Wintersemester 2017/2018

<u>PLENUM</u>: Donnerstag, 7.12.2017.

Relativistischer Spin und Bahndrehimpuls

Betrachten Sie die stationäre Dirac-Gleichung für das Wasserstoffatom unter der Annahme, dass $m_{\text{Elektron}}/m_{\text{Proton}} \to 0$, d.h., dass die Bewegung des Atomkerns vernachlässigt werden kann

$$[\, c\,\vec{\alpha}\,\vec{p} + \beta\, mc^2 \;+\; V(r)]\;\psi(\vec{r}) \;=\; E\;\psi(\vec{r}),$$

wobei $r = |\vec{r}|$ und $V(r)$ das Coulombpotential des Elektrons im Feld des Protons darstellt.

a) Welche der folgenden Observablen ist eine Erhaltungsgrösse für dieses System: $\vec{S}_D^2$, $S_{D\,i}$, $\vec{L}_D^2$, $L_{D\,i}$, $i = \{x, y, z\}$? $\vec{L}_D = (\vec{r} \times \vec{p})\mathbb{1}_{4\times4}$ bezeichnet hierbei den Bahndrehimpulsoperator, während der Spinoperator durch $\vec{S}_D = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass die Komponenten des Gesamtdrehimpulses $\vec{J_D} = \vec{L}_D + \vec{S}_D$, Erhaltungsgrössen sind.

c) Leiten Sie die folgende, nicht-relativistische, Näherung der obigen Dirac Gleichung ab

$$\left[\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) - \frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3c^2} + \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\Delta V(r)\right)\mathbb{1}_{2\times2} + \frac{1}{2m^2c^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{dV(r)}{dr}\,\vec{L}\cdot\vec{S}\right]\;\varphi(\vec{r}) = \epsilon\,\varphi(\vec{r}),$$

wobei hier $\varphi(\vec{r})$ der 'obere' Zweierspinor ist und $\epsilon = E - mc^2$ die nicht-relativistische Energie ist.
Hinweis: Schreiben Sie zuerst die Dirac-Gleichung als zwei gekoppelte Gleichungen für die Zweierspinoren φ und χ. Entwickeln Sie diese dann in $\left(\frac{\epsilon - V}{mc^2}\right)$. Den Darwin-Term brauchen Sie nicht erneut abzuleiten (siehe 3. Plenum).

d) Welche Terme dieses Hamilton-Operators (aus **c)**) kommutieren sicher mit $\vec{L}$ bzw. mit $\vec{S}$ kommutieren? Zeigen Sie in Folge, dass sie für diesen Hamiltonoperator die Komponenten des Gesamtdrehimpulses $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, nicht aber $\vec{L}$ und $\vec{S}$, Erhaltungsgrössen sind. Welcher Term im Hamilton-Operator ist dafür verantwortlich, dass $\vec{L}$ und $\vec{S}$ nicht unabhängig voneinander erhalten sind?

e) Machen Sie für $\varphi(\vec{r})$ den Produktansatz $\varphi(\vec{r}) = f(r)\mathcal{Y}(\theta, \phi)$, wobei $\mathcal{Y}(\theta, \phi)$ eine zweikomponentige Spinor-Wellenfunktion bezeichnet. Drücken Sie $\mathcal{Y}(\theta, \phi)$ explizit durch Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$ und Zweierspinoren aus. Sie brauchen die entschprechenden Vorfaktoren nicht zu berechnen.