Plenum Streutheorie – Lösung

$$V = \begin{cases} -V_0 & r < r_0 \\ 0 & r \geq r_0 \end{cases}$$

Streuproblem

in:

$$e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

out:

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} + \underbrace{f(\Theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{Kugelwelle}}$$

Die Lösung kann man als Bornsche Reihe schreiben (nur falls die Reihe konvergiert!):

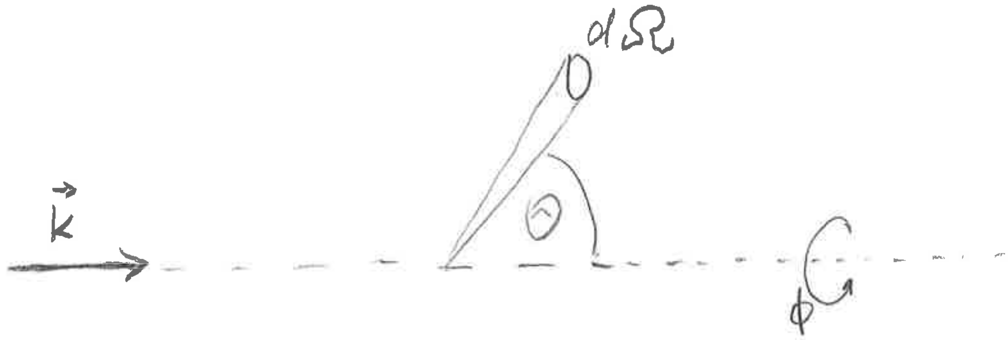
$$|\psi_{\vec{k}}^{+}\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left[G^{+}(\vec{k})\,U\right]^{n}\right)|\vec{k}\rangle$$

$$\langle\vec{r}|\vec{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\,e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad ; \quad U(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}V(\vec{r})$$

Greensche Funktion (siehe Übung):

$$G^{+}(\vec{r},\vec{r}\,',\vec{k}) = -\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \langle\vec{r}|G^{+}(\vec{k})|\vec{r}\,'\rangle$$

Von Interesse ist differentielle Streuquerschnitt: 2



$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\phi) = \frac{dN}{J_0\, d\Omega}$$

Für elastische Streuung: $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\phi) = |\underbrace{f(\theta,\phi)}_{\text{Streuamplitude}}|^2$

$$f(\theta,\phi) = -2\pi^2 \langle \vec{k}' | \mathcal{U} | \Psi_{\vec{k}}^{+} \rangle$$

↑ für diese Wellenfunktion nehmen wir Bornsche Reihe

$$|\Psi_{\vec{k}}^{+}\rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1. B.N.}}}{|\vec{k}\rangle} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2. B.N.}}}{G^{+}(\vec{k})\,\mathcal{U}|\vec{k}\rangle} + O\left[(G^{+}\mathcal{U})^2\right]$$

1. Bornsche Näherung anwendbar wenn (Ortsdarstellung)

$$\left|\langle \vec{r} | G^{+}(\vec{k})\,\mathcal{U} | \vec{k}\rangle\right| \ll \left|\langle \vec{r} | \vec{k}\rangle\right|$$

(Korrekturen zu $|\vec{k}\rangle$ sind klein)

$$\frac{2m}{\hbar^2}\left|\langle \vec{r} | G^{+}(\vec{k})\, V | \vec{k}\rangle\right| \ll \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

Wir berechnen jetzt $\langle \vec r | G^+(\vec k) V | \vec k \rangle$

$$\int d^3r' \int d^3r'' \underbrace{\langle \vec r | G^+(\vec k) | \vec r' \rangle}_{-\frac{e^{ik|\vec r - \vec r'|}}{4\pi |\vec r - \vec r'|}} \underbrace{\langle \vec r' | V | \vec r'' \rangle}_{V(\vec r')\delta^{(3)}(\vec r' - \vec r'')} \underbrace{\langle \vec r'' | \vec k \rangle}_{\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} e^{i\vec k \vec r''}} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi \sqrt[3]{2\pi}} \int d^3r' \frac{e^{ik|\vec r - \vec r'|}}{|\vec r - \vec r'|} V(\vec r') e^{i\vec k \vec r'} =$$

wir nennen $\vec r'' = \vec r' - \vec r$

$$= -\frac{1}{4\pi \sqrt[3]{2\pi}} \int d^3r'' \frac{e^{ik|\vec r''|}}{|\vec r''|} V(\vec r'' + \vec r) e^{i\vec k \vec r} e^{i\vec k \vec r''} \lessapprox$$

wir nehmen $\vec r = 0$ weil dort ist die Korrektur sowieso am grössten

$$\lessapprox -\frac{1}{4\pi \sqrt[3]{2\pi}} \underbrace{\int d^3r'' \frac{e^{ikr''}}{r''} V(\vec r'') e^{i\vec k \vec r''}}_{\text{umnennen: } r'' \to r \text{ und benutzen } V(\vec r) = V(r)} =$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{\infty} dr \, r^2 \frac{e^{ikr}}{r} V(r) e^{ikr\cos\theta} = \{ \cos\theta = u \}$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} dr \, r e^{ikr} V(r) \int_{-1}^{1} du \, e^{ikru} =$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} dr \, r e^{ikr} V(r) \frac{1}{ikr} \left(e^{ikr} - e^{-ikr} \right) =$$

$$= \frac{2\pi}{ik} \int_0^\infty dr\, V(r) \left(e^{2ikr} - 1\right)$$

Allgemein für $V(\vec{r}) = V(r)$:

$$\left| \langle \vec{r} \,|\, G^+ U \,|\, \vec{k} \rangle \right| \underset{\vec{r}=0}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{4\pi \sqrt[3]{2\pi}} \cdot \frac{2\pi}{k} \underbrace{\left| \int_0^\infty dr\, V(r) \left(e^{2ikr} - 1\right) \right|}_{I_V} =$$

$$= \frac{m}{\hbar^2 k} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \cdot |I_V| \ll \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

$$\frac{m}{\hbar^2 k} |I_V| \ll 1$$

für $V(r) = -V_0\, \Theta(r - r_0)$

$$I_V = -V_0 \int_0^{r_0} \left(e^{2ikr} - 1\right) dr = -V_0 \left[\frac{1}{2ik} \left(e^{2ikr_0} - 1\right) - r_0 \right]$$

d.h.

$$\frac{m V_0}{\hbar^2 k} \left| \frac{e^{ikr_0} \sin kr_0}{k} - r_0 \right| \ll 1$$

Energie:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Hohe Energien (grosses k): $\frac{m V_0 r_0}{\hbar^2 k} \ll 1$

Kleine energien: $\frac{m V_0}{\hbar^2 k} \left| \frac{2ikr_0 - \frac{4k^2 r_0^2}{2} + \dots}{2ik} - r_0 \right| \ll 1$

$$\frac{mV_0}{\hbar^2 k} \left| \frac{-\frac{k^2 r_0^2}{2}}{2ik} \right| << 1$$

$$\frac{mV_0 r_0^2}{\hbar^2} << 1 \quad \rightarrow$$ für kleine Energien muss $V_0 r_0^2$ klein sein (also kurzreichweitig und schwaches Potential)

Differentieller Streuquerschnitt in 1. B.N.

Streuamplitude für $V(\vec{r}) = V(r)$

$$f(\theta,\phi) = -2\pi^2 \langle \vec{k}' | M | \psi^+_{\vec{k}} \rangle \underset{\text{1. BN}}{=} \frac{-4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle$$

$$\langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle = \tilde{V}(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{r}\, V(\vec{r})\, e^{-i\vec{q}\vec{r}}$$

$$\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$$

Energieerhaltung: $k = k'$

$$q^2 = k^2 + k'^2 - 2kk'\cos\theta = 2k^2(1-\cos\theta) = 4k^2 \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\boxed{q = 2k \sin\frac{\theta}{2}}$$

(6)

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r\, V(r)\, e^{-i\vec{q}\vec{r}} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\infty} dr\, r^2 V(r)\, e^{iqr\cos\theta} =$$

$$\{ \cos\theta = u \}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\cdot 2\pi \cdot \int_0^{\infty} dr\, r^2 V(r) \underbrace{\int_{-1}^{1} du\, e^{iqru}}_{\frac{1}{iqr}\left(e^{iqr}-e^{-iqr}\right) = \frac{2\sin qr}{qr}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} dr\, \frac{2r\,V(r)\sin qr}{q}$$

$$\{ V(r) = -V_0\,\Theta(r-r_0)$$

$$= \frac{-V_0}{(2\pi)^2}\frac{2}{q}\int_0^{r_0} dr\, r\sin qr\, dr = \frac{2V_0}{(2\pi)^2 q^3}\left(\sin qr_0 - qr_0\cos qr_0\right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta,\varphi)|^2 = \left|\frac{4\pi^2 m\cdot 2V_0}{\hbar^2 (2\pi)^2 q^3}\right|^2 \left(\sin qr_0 - qr_0\cos qr_0\right)^2 =$$

$$= \frac{4m^2V_0^2}{\hbar^4 q^6}\left(\sin^2 qr_0 + q^2r_0^2\cos^2 qr_0 - qr_0\sin 2qr_0\right)$$

mit $q = 2k\sin\frac{\theta}{2}$

kleine Energien : $q \to 0 \; \left\{ \begin{array}{l} \sin qr_0 \cong qr_0 - \frac{q^3r_0^3}{3!} \\ qr_0\cos qr_0 \cong qr_0 - \frac{q^3r_0^3}{2!} \end{array} \right.$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \xrightarrow[q\to 0]{} \frac{4m^2V_0^2r_0^4}{9\hbar^4}$$

unabhängig von q also von k und θ!

$$\sigma_{tot} = \int d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Für $q \to 0$: $\sigma_{tot} = 4\pi \, \frac{d\sigma}{d\Omega}$ (weil $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ = const)

Allgemein:

$$\sigma_{tot} = \frac{8\pi m^2 V^2 r_0^6}{\hbar^4 \cdot 4k^2 r_0^2} \left[1 - \frac{1}{4k^2 r_0^2} + \frac{\sin 4kr_0}{8k^3 r_0^3} - \frac{\sin^2 2kr_0}{16 k_0^4 r_0^4} \right]$$