1. Plenum

Zeitabhängige Störungstheorie und optische Anregung

$$H = \underbrace{E_1 |1\rangle\langle 1| + E_2 |2\rangle\langle 2|}_{\mathcal{H}_0} + \underbrace{\delta \cdot \sin(\omega t)\, \Theta(t) \left(|2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| \right)}_{V}$$

$\psi_0 = |1\rangle$ Alles in Schrödinger-Bild angegeben

a) Im Wechselwirkungsbild gilt: $|\psi\rangle_I = e^{iH_0 t} |\psi\rangle_S$

$$V_I = e^{iH_0 t} V_S e^{-iH_0 t}$$

$$i\partial_t |\psi\rangle_I = V_I |\psi\rangle_I$$

$$e^{iH_0 t} = \begin{pmatrix} e^{iE_1 t} & \emptyset \\ \emptyset & e^{iE_2 t} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow V_I = \begin{pmatrix} e^{iE_1 t} & \emptyset \\ \emptyset & e^{iE_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \emptyset & \delta \\ \delta & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-iE_1 t} & \emptyset \\ \emptyset & e^{-iE_2 t} \end{pmatrix} \cdot \sin(\omega t) \cdot \Theta(t)$$

$$= \sin(\omega t)\, \Theta(t)\, \delta \cdot \begin{pmatrix} \emptyset & e^{i(E_1 - E_2)t} \\ e^{i(E_2 - E_1)t} & \emptyset \end{pmatrix}$$

$$|\psi\rangle_I = a(t) \cdot |1\rangle + b(t) |2\rangle$$

$$i\partial_t a(t) = \delta \Theta(t) \sin(\omega t) e^{i(E_1 - E_2)t} b(t)$$
$$i\partial_t b(t) = \delta \Theta(t) \sin(\omega t) e^{i(E_2 - E_1)t} a(t)$$

$$|\psi\rangle_I^I(t) = -i \int_{-\infty}^{t} V_I(\tilde{t}) |\psi\rangle_I^0 \, d\tilde{t} = -i\delta \int_0^t \sin(\omega \tilde{t}) e^{i(E_2 - E_1)\tilde{t}} d\tilde{t} |2\rangle$$

$$\sin(\omega \tilde{t}) = \frac{e^{i\omega \tilde{t}} - e^{-i\omega \tilde{t}}}{2i}$$

$$|\psi\rangle_I^I(t) = -\frac{\delta}{2} \int_\emptyset^t \left(e^{i(\omega + E_2 - E_1)\tilde{t}} - e^{i(E_2 - E_1 - \omega)\tilde{t}} \right) d\tilde{t} |2\rangle$$

$$= -\frac{\delta}{2} \left(\frac{e^{i(E_2 - E_1 + \omega)\tilde{t}}}{i(E_2 - E_1 + \omega)} - \frac{e^{i(E_2 - E_1 - \omega)\tilde{t}}}{i(E_2 - E_1 - \omega)} \right) \Bigg|_0^t |2\rangle =$$

$$-\frac{\delta}{2} \left[e^{i(E_2 - E_1)t} \left(\frac{e^{i\omega t}}{i(E_2 - E_1 + \omega)} - \frac{e^{-i\omega t}}{i(E_2 - E_1 - \omega)} \right) - 1 \cdot \left(\frac{1}{i(E_2 - E_1 + \omega)} - \frac{1}{i(E_2 - E_1 - \omega)} \right) \right] |2\rangle$$

$$|\psi_I^f(t)\rangle = e^{i\frac{(E_2-E_1)t}{2}}\,\delta\left[e^{-i\frac{\omega}{2}t}\frac{\sin((E_2-E_1-\omega)\frac{t}{2})}{E_2-E_1-\omega} - e^{i\frac{\omega}{2}t}\frac{\sin((E_2-E_1+\omega)\frac{t}{2})}{E_2-E_1+\omega}\right]|2\rangle$$

$$P_{2\leftarrow 1}(t) = \delta^2\left[\frac{\sin^2((E_2-E_1-\omega)\frac{t}{2})}{(E_2-E_1-\omega)^2} + \frac{\sin^2((E_2-E_1+\omega)\frac{t}{2})}{(E_2-E_1+\omega)^2} - 2\cos(\omega t)\frac{\sin((E_2-E_1-\omega)\frac{t}{2})\sin((E_2-E_1+\omega)\frac{t}{2})}{(E_2-E_1-\omega)(E_2-E_1+\omega)}\right]$$

b) $\omega \ll |\delta|$
$\omega \ll |E_2-E_1|$

$\rightarrow$ Störung ändert sich langsam $\rightarrow$ adiabatische Näherung

$$\mathcal{H}(t) \simeq \begin{pmatrix} E_1 & \delta\sin(\omega t) \\ \delta\sin(\omega t) & E_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda_{1,2} \text{ from:}$$

$$(E_1-\lambda)(E_2-\lambda) - \delta^2\sin^2(\omega t) = \emptyset$$

$$E_1E_2 - (E_1+E_2)\lambda + \lambda^2 - \delta^2\sin^2(\omega t) = \emptyset$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{E_1+E_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{E_1-E_2}{2}\right)^2 + \delta^2\sin^2(\omega t)}$$

$$\lambda_1 = \frac{E_1+E_2}{2} \cancel{\pm} \sqrt{\left(\frac{E_1-E_2}{2}\right)^2 + \delta^2\sin^2(\omega t)}$$

$$|\psi_1\rangle = ?$$

$$\lambda_1 a_1(t) = E_1\cdot a_1(t) + \delta\sin(\omega t)\, b_1(t)$$

$$\lambda_1 b_1(t) = \delta\sin(\omega t)\, a_1(t) + E_2\cdot b_1(t)$$

$$\left(\frac{E_2-E_1}{2} \cancel{\pm} \sqrt{}\right) a_1(t) = \delta\sin(\omega t)\, b_1(t)$$

$$\left(\frac{E_1-E_2}{2} + \sqrt{}\right) b_1(t) = \delta\sin(\omega t)\, a_1(t)$$

$$a_1(t) = \frac{\frac{E_1-E_2}{2} + \sqrt{}}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{}^2 + \frac{E_1-E_2}{2}\sqrt{}}} \qquad b_1(t) = \frac{\delta\sin(\omega t)}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{}^2 + \frac{E_1-E_2}{2}\sqrt{}}}$$

$$\rightarrow P_{2\leftarrow 1} = \frac{\delta^2\sin^2(\omega t)}{2\left(\left(\frac{E_1-E_2}{2}\right)^2 + \delta^2\sin^2(\omega t) + \frac{E_1-E_2}{2}\sqrt{}\right)}$$

c) an $t=0$ springt Potential plötzlich von

$$\begin{pmatrix} E_1 & \\ & E_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} E_1 & \delta \\ \delta & E_2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Neue Eigenzustände, welche mit Wahrscheinlichkeit

$$p_\beta = \frac{\delta^2}{2\left(\left(\frac{E_1-E_2}{2}\right)^2 + \delta^2 + \frac{E_1-E_2}{2}\sqrt{}\right)}$$ bzw. $$p_\alpha = \frac{2\left(\frac{E_1-E_2}{2}\right)^2 + \delta^2 + 2\,\frac{E_1-E_2}{2}\sqrt{}}{2\left(\left(\frac{E_1-E_2}{2}\right)^2 + \delta^2 + \frac{E_1-E_2}{2}\sqrt{}\right)}$$

Angenommen werden.

Nun wird langsam das Potential geändert, unmittelbar nach dem Einschalten ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Zustand 2 zu finden $\emptyset$.

Nach längerer Zeit (Wenn die beiden Zustände langsam geändert wurden) ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten aus den (Zeitabhängigen) zerlegungen der Eigenvektoren.

$$p_{2\leftarrow 1}(t) = p_\beta \cdot p_{2\beta}(t) + p_\alpha \cdot p_{2\alpha}(t)$$

$$p_{2\beta}(t) + p_{2\alpha}(t) = 1 \qquad p_\beta + p_\alpha = 1$$

$$p_\beta\, p_{2\beta}(t) + (1-p_\beta)(1-p_{2\beta}(t)) =$$

$$1 - p_\beta - p_{2\beta}(t) + 2\cdot p_\beta \cdot p_{2\beta}(t)$$

d) für Rabi-Oszillationen können die Bewegungsgleichungen aus a) folgendermaßen geschrieben werden:

$$i\,\partial_t a(t) = \delta \cdot \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\, e^{i(E_1-E_2)t}\, b(t)$$
$$i\,\partial_t b(t) = \delta\, \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\, e^{i(E_2-E_1)t}\, a(t)$$

wir nehmen an, dass

$E_1 - E_2 \approx \omega$

und vernachlässigen hochoszillierende Terme in der Differentialglg.

$$i\,\partial_t a(t) = -\delta\, e^{i(E_1-E_2-\omega)t}/2i\; b(t)$$
$$i\,\partial_t b(t) = \delta\, e^{i(\omega-E_1+E_2)t}/2i\; a(t)$$

$$a = a_0 \cdot e^{i\bar{\omega}t} \rightarrow b = b_0 \cdot e^{i\bar{\omega}t} e^{i(\omega - E_1 + E_2)t}$$

$$-\bar{\omega} a_0 = -\delta/_{2i}\, b_0$$

$$-(\bar{\omega} + \omega - E_1 + E_2) b_0 = \delta/_{2i}\, a_0$$

$$-(\bar{\omega} + \omega - E_1 + E_2) = -\frac{\delta^2}{4\bar{\omega}}$$

$$b_0 = \frac{2i\bar{\omega}}{\delta} a_0$$

$$\bar{\omega}^2 + \bar{\omega}(\omega - E_1 + E_2) - \frac{\delta^2}{4} = 0$$

$$\bar{\omega}_{1,2} = \frac{E_1 - E_2 - \omega}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{E_1 - E_2 - \omega}{2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{4}}}$$

$$\begin{matrix} b(t=0) = 0 \\ a(t=0) = 1 \end{matrix} \rightarrow \left(e^{i\bar{\omega}_1 t} - e^{-i\bar{\omega}_2 t}\right) \cdot C$$

$$\left(\frac{e^{i\bar{\omega}_1 t}\delta}{2i\bar{\omega}_1} - \frac{e^{i\bar{\omega}_2 t}\delta}{2i\bar{\omega}_2}\right) \cdot C = 1$$

$$C \cdot \delta \cdot \left(\frac{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}{2}\right) = i(\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\omega}_2)$$

$$C \cdot \delta \cdot \sqrt{\left(\frac{E_1 - E_2 - \omega}{2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{4}} = -i\frac{\delta^2}{4}$$

$$C = -i\frac{\delta}{\sqrt{}\,4}$$