Technische Universität Wien

Prof. A. Toschi, Prof. K. Held, Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch, DI T. Ribic

2. Test zur Quantentheorie II

Wintersemester 2017/2018

Freitag, **26.1.2018**.

Test A **Name:** **Matrikelnr.:**

A1	A2	A3	A4	Σ
15	14	8+4*	13	50+4*

1. Wechselwirkende Elektronen in zweiter Quantisierung *4+3+5+3=15 Punkte*

Betrachten Sie den Hamilton-Operator des Hubbard-Modells

$$H = -t \sum_\sigma \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=i\pm1} c^\dagger_{i\sigma} c_{j\sigma} + U \sum_i c^\dagger_{i\uparrow} c_{i\uparrow} c^\dagger_{i\downarrow} c_{i\downarrow},$$

wobei $c^{(\dagger)}_{i\sigma}$ ein Vernichtungs-(Erzeugungs-)operator für ein Elektron mit Spin σ auf Gitterplatz i ist, und wir periodische Randbedingungen annehmen, d.h. $c_{0\sigma} = c_{M\sigma}$ und $c_{M+1\,\sigma} = c_{1\sigma}$.

a) Betrachten Sie zuerst den Fall $t > 0$, $U = 0$ (nicht wechselwirkender Limes) und $M = 4$. Benutzen Sie den folgenden Basiswechsel der Erzeugungs-/Vernichtungsoperatoren $\tilde{c}^\dagger_{k\sigma} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_i e^{-ikx_i} c^\dagger_{i\sigma}$ bzw. $\tilde{c}_{k\sigma} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_i e^{ikx_i} c_{i\sigma}$ für ein Elektron auf dem Gitterplatz $x_i = i\,a$, mit $i = 1, ..., M$ (a ist die Gitterkonstante). Welche Werte von k sind mit der Periodizität verträglich? Geben Sie die Energieeigenwerte an. Was ist der Grundzustand des Systems und dessen Entartung im Fall (i) eines Elektrons und vierer Gitterplätze; (ii) vierer Elektronen und vierer Gitterplätze?

b) Betrachten Sie nun den Fall $t = 0$, $U > 0$ (atomarer Limes) und $M = 4$. Dann sind die Gitterplätze unabhängig voneinander und $H = \sum_i H^{at}_i$. Finden Sie die Eigenwerte und Eigenzustände des Hamiltonoperators H^{at}_i. Berechnen Sie den Grundzustand des Systems und dessen Entartung im Fall (i) eines Elektrons und vierer Gitterplätze; (ii) vierer Elektronen und vierer Gitterplätze?

c) Jetzt betrachten Sie den Fall $t > 0$ und $U > 0$ mit $M = 4$. Berechnen Sie den Kommutator des Operators $\gamma = \sum_{i=1}^{M} (-1)^i c^\dagger_{i\uparrow} c^\dagger_{i\downarrow}$ mit H. Wenn Sie von einem Eigenzustand des Hamilton-Operators $H|\varphi\rangle = E_\varphi|\varphi\rangle$ ausgehen, welche Konsequenzen ergeben sich daraus für den (nicht notwendigerweise normierten) Zustand $|\chi\rangle = \gamma|\varphi\rangle$?

d) Für den Fall $t > 0$ und $U > 0$ mit $M = 4$ und zwei Elektronen, geben Sie irgendeinen Eigenzustand von H in zweiter Quantisierung an.

2. Verständnis-Fragen *4+2+4+4=14 Punkte*

a) Bestimmen Sie, ausgehend von der freien Dirac-Gleichung $i\hbar\partial_t\Psi = ((c\hbar/i)\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2)\Psi$, die Stromdichte $\vec{j}$, welche zusammen mit der Dichte $\rho = (\Psi^*)^T\Psi$ die Divergenzgleichung $\partial_t\rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$ erfüllt.

b) Demonstrieren Sie – ausgehend von den fermionischen Kommutationsrelationen in 2. Quantisierung – das Pauli-Verbot.

c) Geben Sie den Hamiltonian $H = J\left[c^\dagger_{1\uparrow}c_{1\downarrow}c^\dagger_{2\downarrow}c_{2\uparrow} + c^\dagger_{2\uparrow}c_{2\downarrow}c^\dagger_{1\downarrow}c_{1\uparrow}\right]$ als Matrix in der Basis mit 2 Fermionen auf 2 Gitterplätzen und Spin in z-Richtung $S_z = 0$ an. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren. Begründen Sie physikalisch, warum die Eigenvektoren zum höchsten und niedrigsten Eigenwert genau diese Form haben.

d) Berechnen Sie die Wirkung des eindimensionalen Pfades $x(t) = x_i + (x_f - x_i)(t - t_i)^2/(t_f - t_i)^2$ für das Feynmansche Pfadintegral für $V = 0$. Bis zu welcher Größenordnung von $\hbar$ interferiert dieser Pfad konstruktiv mit dem klassischen Pfad?

3. Green'sche Funktion der Klein-Gordon Gleichung *4+2+4*+2=8+4* Punkte*

Betrachten Sie die statische Klein-Gordon Gleichung mit einer δ-Störung am Ursprung:

$$\left(\Delta - m^2\right)\Psi(r) = \beta\delta^3(r)$$

Dabei ist Δ der Laplace-Operator in drei Dimensionen, β eine reele Konstante; die Masse m wird in passenden Einheiten gemessen, um alle anderen Konstanten verschwinden zu lassen; r beschreibt den Positionsvektor.

a) Fourier-transformieren Sie obige Gleichung und geben Sie die Darstellung im Impuls-Raum an.

b) Finden Sie einen Ausdruck für die Lösungsfunktion $\overline{\Psi}(k)$ im Impulsraum.

c) Transformieren Sie $\overline{\Psi}(k)$ zurück in den Ortsraum. (Hinweis: Residuensatz)

d) Geben Sie an, an welche Art von Feld Sie das Resultat aus **c)**, $\Psi(r) = -\beta\exp(-mr)/4\pi|r|$, im Limes $m \to 0$ erinnert.

4. Geboostete Elektronen *3+2+3+5=13 Punkte*

a) Bestimmen Sie, ob der Elektronenspin eine Erhaltungsgröße der freien Dirac-Gleichung ist, indem Sie den Kommutator der Spin-Matrizen mit dem Dirac-Hamiltonoperator H_{Dirac} bilden.

b) Geben Sie die zeitabhängigen Lösungen der Dirac-Gleichung für ruhenden Elektronen positiver Energie mit Spin in positiver und negativer z-Richtung an. Geben Sie weiters die Lösung an, die einem *ruhenden* Elektron mit Spin in positiver y-Richtung entspricht.

c) Argumentieren Sie, wie die Lösungen der Dirac-Gleichung mit $S_z = \pm\hbar/2$ aus **b)** transformieren müssen, wenn eine Lorentz-Transformation in ein System durchgeführt wird, in dem das Elektron mit dem Impuls p_0 in positiver z-Richtung fliegt. Die Normierung der Wellenfunktion ist für dieses Beispiel unerheblich.

d) Geben Sie, ausgehend von den Resultaten aus **c)**, die transformierte Gestalt der Lösung zu $S_y = \hbar/2$ aus **b)** im bewegten System an. Berechnen Sie für diesen Zustand die zeitabhängigen Erwartungswerte einer Messung des Spins in x, y und z-Richtung im bewegten System. (*Hinweis*: Der Ortsanteil der Wellenfunktion ist für die Bestimmung der Spin-Erwartungswerte unerheblich. Normieren Sie die Spinoren und verwenden sie nur diese für Ihre Rechnung.)

Viel Erfolg!