

2. Test zur Quantentheorie II

Wintersemester 2017/2018

Freitag, 26.1.2018.

Test B

Name:

Matrikelnr.:

B1	B2	B3	B4	Σ
14	13	15	8+4*	50+4*

1. Theorie-Fragen

2+4+4+4=14 Punkte

- a) Demonstrieren Sie – ausgehend von den fermionischen Kommutationsrelationen in 2. Quantisierung – das Pauli-Verbot.
- b) Geben Sie den Hamiltonian $H = J[c_{1\uparrow}^\dagger c_{1\downarrow} c_{2\downarrow}^\dagger c_{2\uparrow} + c_{2\uparrow}^\dagger c_{2\downarrow} c_{1\downarrow}^\dagger c_{1\uparrow}]$ als Matrix in der Basis mit 2 Fermionen auf 2 Gitterplätzen und Spin in z -Richtung $S_z = 0$ an. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren. Begründen Sie physikalisch, warum die Eigenvektoren zum höchsten und niedrigsten Eigenwert genau diese Form haben.
- c) Berechnen Sie die Wirkung des eindimensionalen Pfades $x(t) = x_i + (x_f - x_i)(t - t_i)^2 / (t_f - t_i)^2$ für das Feynmansche Pfadintegral für $V = 0$. Bis zu welcher Größenordnung von \hbar interferiert dieser Pfad konstruktiv mit dem klassischen Pfad?
- d) Bestimmen Sie, ausgehend von der freien Dirac-Gleichung $i\hbar\partial_t\Psi = ((c\hbar/i)\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2)\Psi$, die Stromdichte \vec{j} , welche zusammen mit der Dichte $\rho = (\Psi^*)^T\Psi$ die Divergenzgleichung $\partial_t\rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$ erfüllt.

2. Elektronenspins unter Boosts

3+2+3+5=13 Punkte

- a) Bestimmen Sie, ob der Elektronenspin eine Erhaltungsgröße der freien Dirac-Gleichung ist, indem Sie den Kommutator der Spin-Matrizen mit dem Dirac-Hamiltonoperator H_{Dirac} bilden.
- b) Geben Sie die zeitabhängigen Lösungen der Dirac-Gleichung für ruhenden Elektronen positiver Energie mit Spin in positiver und negativer z -Richtung an. Geben Sie weiters die Lösung an, die einem *ruhenden* Elektron mit Spin in negativer y -Richtung entspricht.
- c) Argumentieren Sie, wie die Lösungen der Dirac-Gleichung mit $S_z = \pm\hbar/2$ aus **b)** transformieren müssen, wenn eine Lorentz-Transformation in ein System durchgeführt wird, in dem das Elektron mit dem Impuls p_0 in positiver z -Richtung fliegt. Die Normierung der Wellenfunktion ist für dieses Beispiel unerheblich.
- d) Geben Sie, ausgehend von den Resultaten aus **c)**, die transformierte Gestalt der Lösung zu $S_y = -\hbar/2$ aus **b)** im bewegten System an. Berechnen Sie für diesen Zustand die zeitabhängigen Erwartungswerte einer Messung des Spins in x , y und z -Richtung im bewegten System. (*Hinweis:* Der Ortsanteil der Wellenfunktion ist für die Bestimmung der Spin-Erwartungswerte unerheblich. Normieren Sie die Spinoren und verwenden sie nur diese für Ihre Rechnung.)

3. Zweite Quantisierung für das Hubbard-Modell

4+3+5+3=15 Punkte

Betrachten Sie den Hamilton-Operator des Hubbard-Modells

$$H = -t \sum_{i=1}^L \sum_{j=i\pm 1} \sum_{\sigma} c_{i\sigma}^{\dagger} c_{j\sigma} + U \sum_i c_{i\uparrow}^{\dagger} c_{i\uparrow} c_{i\downarrow}^{\dagger} c_{i\downarrow},$$

wobei $c_{i\sigma}^{(\dagger)}$ ein Vernichtungs-(Erzeugungs-)operator für ein Elektron mit Spin σ auf Gitterplatz i ist, und wir periodische Randbedingungen annehmen, d.h. $c_{0\sigma} = c_{L\sigma}$ und $c_{L+1\sigma} = c_{1\sigma}$.

- Betrachten Sie zuerst den Fall $t > 0$, $U = 0$ (nicht wechselwirkender Limes) und $L = 4$. Benutzen Sie den folgenden Basiswechsel der Erzeugungs-/Vernichtungsoperatoren $\tilde{c}_{k\sigma}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_i e^{-ikx_i} c_{i\sigma}^{\dagger}$ bzw. $\tilde{c}_{k\sigma} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_i e^{ikx_i} c_{i\sigma}$ für ein Elektron auf dem Gitterplatz $x_i = ia$, mit $i = 1, \dots, L$ (a ist die Gitterkonstante). Welche Werte von k sind mit der Periodizität verträglich? Geben Sie die Energieeigenwerte an. Was ist der Grundzustand des Systems und dessen Entartung im Fall (i) eines Elektrons und vierer Gitterplätze; (ii) vierer Elektronen und vierer Gitterplätze?
- Betrachten Sie nun den Fall $t = 0$, $U > 0$ (atomarer Limes) und $L = 4$. Dann sind die Gitterplätze unabhängig voneinander und $H = \sum_i H_i^{at}$. Finden Sie die Eigenwerte und Eigenzustände des Hamiltonoperators H_i^{at} . Berechnen Sie den Grundzustand des Systems und dessen Entartung im Fall (i) eines Elektrons und vierer Gitterplätze; (ii) vierer Elektronen und vierer Gitterplätze?
- Jetzt betrachten Sie den Fall $t > 0$ und $U > 0$ mit $L = 4$. Berechnen Sie den Kommutator des Operators $\gamma = \sum_{i=1}^L (-1)^i c_{i\downarrow}^{\dagger} c_{i\uparrow}^{\dagger}$ mit H . Wenn Sie von einem Eigenzustand des Hamilton-Operators $H|\chi\rangle = E_{\chi}|\chi\rangle$ ausgehen, welche Konsequenzen ergeben sich daraus für den (nicht notwendigerweise normierten) Zustand $|\varphi\rangle = \gamma|\chi\rangle$?
- Für den Fall $t > 0$ und $U > 0$ mit $L = 4$ und zwei Elektronen, geben Sie irgendeinen Eigenzustand von H in zweiter Quantisierung an.

4. Green'sche Funktion der Klein-Gordon Gleichung

4+2+4*+2=8+4* Punkte

Betrachten Sie die statische Klein-Gordon Gleichung mit einer δ -Störung am Ursprung:

$$(\Delta - m^2) \Psi(r) = \alpha \delta^3(r)$$

Dabei ist Δ der Laplace-Operator in drei Dimensionen, α eine reelle Konstante; die Masse m wird in passenden Einheiten gemessen, um alle anderen Konstanten verschwinden zu lassen; r beschreibt den Positionsvektor.

- Fourier-transformieren Sie obige Gleichung und geben Sie die Darstellung im Impuls-Raum an.
- Finden Sie einen Ausdruck für die Lösungsfunktion $\tilde{\Psi}(k)$ im Impulsraum.
- Transformieren Sie $\tilde{\Psi}(k)$ zurück in den Ortsraum. (Hinweis: Residuensatz)
- Geben Sie an, an welche Art von Feld Sie das Resultat aus **c)**, $\Psi(r) = -\alpha \exp(-mr)/4\pi|r|$, im Limes $m \rightarrow 0$ erinnert.

Viel Erfolg!