Technische Universität Wien

Prof. A. Toschi, Prof. K. Held, Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch, DI T. Ribic

Nachtest zur Quantentheorie II

Wintersemester 2017/2018

Freitag, **9.3.2018**.

Test A **Name:** **Matrikelnr.:**

A1	A2	A3	A4	Σ
12+4*	11	12	15	50+4*

1. Zeitabhängige Messungen an einem Spin $\frac{1}{2}$-System *5+3+4+4*=12+4* Punkte*

Betrachten Sie ein Spin-1/2 Teilchen, welches zum Zeitpunkt $t = 0$ in der S_z-Basis durch die Dichtematrix ρ_0 beschrieben werden kann. Das Teilchen wird einem Magnetfeld B_z in z-Richtung ausgesetzt, was sich als Hamiltonoperator H manifestiert:

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 \\ 3/10 & 9/10 \end{pmatrix} \ , \ H = -B_z g \mu_B \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

g bezeichnet das gyromagnetische Verhältnis des Spins und μ_B das Bohr'sche Magneton.

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird eine Messung des Spins in z-Richtung durchgeführt. Geben Sie die möglichen Messwerte sowie die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten an. Geben Sie für jedes mögliche Messergebnis die Dichtematrix des Systems unmittelbar nach der Messung an.

b) Berechnen Sie die Zeitentwicklung der Dichtematrix und geben Sie ihre zeitabhängige Form $\rho(t) = e^{-iHt/\hbar}\rho_0 e^{iHt/\hbar}$ an.

c) Berechnen Sie die zeitabhängigen Erwartungswerte einer Spin-Messung in x- und y-Richtung.

d) (*Bonuspunkte*) Gehen Sie davon aus, dass Sie wissen, dass zum Zeitpunkt $t_1 > 0$ eine S_z-Messung durchgeführt wurde, Sie aber keine Kenntnis über das Resultat haben. Geben Sie die Dichtematrix an, welche Ihr Wissen über das System unmittelbar nach der Messung in diesem Szenario am besten beschreibt. Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Streuung in erster Born'scher Näherung *5+6=11 Punkte*

a) Berechnen Sie in erster Born'scher Näherung die Streuamplitude $f(\vartheta, \phi)$ für das folgende kugelsymmetrische Potential ($\alpha > 0$):

$$V(r) = V_0 e^{-r/\alpha}.$$

b) (*unabhängig von* **a)**) Wir betrachten die elastische Streuung eines Protons an einem Wasserstoffatom, das sich in seinem Grundzustand befindet. Das Streupotential lautet dann $V(r) = \frac{e^2}{r} - e^2 \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ wobei die Ladungsverteilung $\rho(r) = |\psi_{1s}(r)|^2 = \frac{e^{-2r/a}}{\pi a^3}$ ist, mit a dem Bohr'schen Radius. Für das Integral $\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ ergibt sich der Wert $\frac{1-e^{-2r/a}}{r}$.
(i) Ist $V(r)$ für große Abstände $r \gg a$ kleiner oder größer als das reine Kernpotential? Begründen Sie kurz, dass in diesem Fall die Born'sche Reihe anwendbar ist.
(ii) Berechnen Sie (für allgemeine Abstände) die Streuamplitude $f(\vartheta, \phi)$ in erster Born'scher Näherung. Was ist also der Einfluss der Elektronenhülle auf die Streuung des Protons? Ziehen Sie eine Verbindung zu Teil (i).

3. Anregungen in einem Atom ohne e^--e^- Wechselwirkung *2+5+5=12 Punkte*

Gehen Sie von einem einfach positiv ionisierten Kohlenstoff-Atom aus (C^+, Kernladungszahl $Z = 6$). Das Ion ist von einem konstanten Magnetfeld umgeben, das einen zusätzlichen Term der Gestalt $H_{B,i} = -\dfrac{e}{2mc} B_0 \left(L_{z,i} + g S_{z,i}\right)$ verursacht. Dabei sind e, m und c positive, reele Konstanten. $L_{z,i}$ ist der Operator des Bahndrehimpulses des i-ten Elektrons in z-Richtung, $S_{z,i}$ sein Spin in z-Richtung. B_0 ist das Magnetfeld und g der Landé-Faktor $g \approx 2.002$. Der Effekt von H_B ist viel kleiner als das attraktive Coulomb-Potential des Kerns ($\hbar eB/mc \ll 1$ Ry). Die Wechselwirkung zwischen den 5 Elektronen wird vernachlässigt. Der Hamiltonoperator ergibt sich insgesamt zu:

$$H = \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{\hbar^2 \Delta_i}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|r_i|} + H_{B,i} \right).$$

a) Skizzieren Sie das Einteilchen-Spektrum des Systems bis $n = 2$. Sie dürfen die Eigenzustände, $|\Psi_{n,l,m}\rangle$, und Eigenenergien eines Rydberg-Atoms als bekannt vorraussetzen.

b) Geben Sie den Grundzustand und ersten angeregten Zustand des Systems, sowie deren jeweilige Entartungen, an, wenn 5 Elektronen im System sind.

c) Was ändert sich an **a)** und **b)** wenn man g mit $g = 2$ nähert?

4. Theoriefragen *3+2+5+5=15 Punkte*

a) Geben Sie den Hamiltonoperator $H = U \sum_i c^\dagger_{i\uparrow} c_{i\uparrow} c^\dagger_{i\downarrow} c_{i\downarrow}$ in 1. Quantisierung für N Fermionen an. Verwenden Sie dabei, dass $|i\sigma\rangle_j$ in 1. Quantisierung beschreibt, dass sich Teilchen j auf Gitterplatz i mit Spin σ befindet. Die Erzeugungsoperatoren $c^\dagger_{i\sigma}$ erzeugen ein Elektron mit Spin σ am Gitterplatz i.

b) Welche der folgenden Operatoren kommutieren mit dem freien (i) Dirac- bzw. (ii) Schrödinger-Hamiltonoperator (ohne Beweis, pro richtiger (falscher) Antwort $+(-)1/2$ Punkt):

$$\text{(I) } \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{S} & 0 \\ 0 & \vec{S} \end{pmatrix} \text{ für (i) bzw. } \vec{\Sigma} = \vec{S} \text{ für (ii);} \quad \text{(II) } \vec{L} + \vec{\Sigma};.$$

Hierbei ist $\vec{S}$ der Vektor der Paulimatrizen mal $\hbar/2$ und $\vec{L}$ der Drehimpuls.

c) Gegeben sei der zeitabhängige Hamiltonoperator: $H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left[x - f(t)a\right]^2$, wobei $f(t) = \left(1 - e^{-t/T}\right)$ und a eine reele Konstante ist. Das System befindet sich bei $t = 0$ im 1. angeregten Zustand von $H(t = 0)$.
(i) Geben Sie für den Fall $T \gg \frac{1}{\omega}$ eine Abschätzung (mit Begründung) der Energie und der (nicht-normierten) Wellenfunktion des Systems zur Zeit $t = t_1$ an. (ii) Argumentieren Sie, ob sich das Resultat qualitativ ändern würde falls $T \ll \frac{1}{\omega}$ gilt.
[Eigenwellenfunktionen von $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$: $\psi_n(y) \propto H_n(y/x_0) e^{-\frac{1}{2}(\frac{y}{x_0})^2}$, mit $H_0(\xi) = 1$, $H_1(\xi) = 2\xi$; $H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$, ... und $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$]

d) Der Hamiltonoperator eines Rotors mit dem Trägheitsmoment $\mathcal{I}$ im magnetischen Feld ist $H = H_0 + V(t) = \frac{L^2}{2\mathcal{I}} + g(t)\vec{L} \cdot \vec{B}$, wobei $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ und $g(t) = g_0 \sin \omega t$ gilt. Es gilt $|\psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\ell = 1, m = 0\rangle + |\ell = 1, m = 1\rangle\right]$ (in $\{L^2, L_z\}$-Basis). (i) Geben Sie die Zeitentwicklung von $|\psi(t)\rangle$ in der Wechselwirkungsdarstellung an. (ii) Geben Sie die Erwartungswerte von L_z und L^2 zur Zeit $t = t_1$.

Viel Erfolg!