Technische Universität
Wien

Prof. A. Toschi, Prof. K. Held, Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch, DI T. Ribic

# 1. Test zur Quantentheorie II

*Wintersemester 2017/2018*

**Freitag**, **17.11.2017**.

**Test A** **Name:** **Matrikelnr.:**

| A1 | A2 | A3 | A4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| 14 | 12 | 13+4* | 11 | 50+4* |

## 1. Verständnisfragen

*3+3+3+5=14 Punkte*

**a)** Geben Sie die Dichtematrix für den reinen Zustand $|\uparrow_x\rangle$ (spin-up in $x$-Richtung) in (i) der Basis $\{|\uparrow_x\rangle, |\downarrow_x\rangle\}$ und (ii) der Basis $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$ an.

**b)** Geben Sie eine Variationswellenfunktion an, mit der Sie die Grundzustandsenergie für das Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2 + |\alpha|(x-a)^4$ nach Ritz sinnvoll (gut) abschätzen können.

**c)** Sei $H(t) = H_0 + \alpha(t)V$ ein zeitabhängiger Hamiltonoperator, wobei $H_0$ und $V$ zeitunabhängige, nicht kommutierende Operatoren im Schrödinger-Bild und $\alpha(t)$ eine Funktion der Zeit sind. Das System befindet sich bei $t = 0$ im Zustand $|\psi_0\rangle$. Welche(r) der folgenden Ausdrücke beschreiben die korrekte Zeitentwicklung des Systems im Schrödinger-Bild?
(i) $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t)t}|\psi_0\rangle$, (ii) $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha(t)Vt}|\psi_0\rangle$, (iii) $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}U_I(t)|\psi_0\rangle$
(jeweils mit kurzer Begründung). $U_I(t)$ ist hier der Zeitentwicklung-Operator im WW-Bild. Was ändert sich im Fall, dass $\alpha(t)=1$?

**d)** Im Partialwellenformalismus ist die radiale Wellenfunktion eines gestreuten Teilchens $R_l(r) = e^{i\delta_l}\left(\cos(\delta_l)j_l(kr) - \sin(\delta_l)n_l(kr)\right)$. Ein Teilchen mit Energie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ werde an dem Potential $V(r) = \begin{cases} \infty & (r \leq a) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$ gestreut. (i) Welche Randbedingung impliziert dieses $V(r)$?
(ii) Drücken Sie die Streuphase für s-Wellen Streuung $\delta_{l=0}$ durch den Kugelradius $a$ aus.
(iii) Berechnen Sie für kleine Energien den Beitrag der s-Wellen Streuung zum *totalen* Wirkungsquerschnitt. Entspricht das Ergebnis der klassischen Erwartung?

## 2. Streutheorie

*6+6=12 Punkte*

Ein Teilchen der Masse $m$ wird an einem rotationssymmetrischen hard-shell Potential gestreut:

$$V(\vec{r}) = V_0 R_0 \delta(|\vec{r}| - R_0), \qquad V_0 > 0, R_0 > 0$$

**a)** Berechnen Sie die Streuamplitude $f(\theta,\phi)$ und den differentiellen Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\phi)$ in erster Born'scher Näherung. Betrachten Sie danach das Ergebnis für kleine Energien. Was können Sie in diesem Fall über die Winkelabhängigkeit sagen?

**b)** Geben Sie einen Ausdruck für die Wellenfunktion $|\psi^+_{\vec{k}}\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left[G^+(\vec{k})U\right]^n\right)|\vec{k}\rangle$ bis Ordnung $n = 1$ in Ortsdarstellung an und werten Sie diesen für $\vec{r} = 0$ aus. Unter welchen Bedingungen an $V_0$ und $R_0$ ist im Fall kleiner Energien die Born'sche Näherung anwendbar?

## 3. Zeitabhängige Störungstheorie

*4+4+2+4*+3=13 + 4* Punkte*

Betrachten Sie ein atomares zwei-Niveau System mit den Basiszuständen $|g\rangle, |e\rangle$, welches an einen harmonischen Oszillator mit dem Erzeugungs-(Vernichtungs-)operator $a^\dagger(a)$ koppelt. Der Hamiltonoperator des Gesamtsystems hat folgende Gestalt:

$$H = \underbrace{\epsilon|e\rangle\langle e| + \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)}_{H_0} + \underbrace{\alpha(t)\Big(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|\Big)\Big(a + a^\dagger\Big)}_{H_1} \quad \text{mit } 0 < \epsilon < \hbar\omega$$

**a)** Wir betrachten zuerst den Fall $\alpha \equiv 0$. Geben Sie für $H_0$ die Energieeigenwerte und die entsprechenden Energieeigenzustände an. (Hinweis: Verwenden Sie hierzu die Basis $|i,n\rangle = |i\rangle \otimes |n\rangle$ mit $i = e, g$ (atomarer Zustand) und $n = 0, 1, .., \infty$ (Besetzung des Oszillators)).

**b)** Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das System im Grundzustand. Wir schalten eine in der Zeit lineare Störung ein:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \lambda t/T & 0 < t \leq T \\ 0 & sonst. \end{cases} \tag{1}$$

Berechnen Sie in 1. Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie den Zustand des Systems $|\psi(t)\rangle$ zur Zeit $t = T$.

**c)** Berechnen Sie in 1. Ordnung Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit, das System für $t = T$ in einem Zustand mit Besetzung $n$ des Oszillators zu finden.

**d)** (*Bonuspunkte*) Betrachten Sie jetzt den Fall des schnellen Ausschaltens der Störung zur Zeit $t = T$. Unter der Annahme, dass der Zustand des Systems durch $|\psi(t)\rangle$ aus Aufgabeteil b) beschrieben werden kann, berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System für $t > T$ in einem Zustand mit Besetzung $n$ des Oszillators zu finden.

**e)** (*auch ohne* **a) - d)** *behandelbar*) Unter welchen Bedingungen an $T$ ist hier (wenn überhaupt) die adiabatische Näherung anwendbar?

*Erinnerung aus Quantentheorie I:* $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$

## 4. Messungen an einem einfachen Spin-System

*2+4+5=11 Punkte*

Betrachten Sie ein Spin-1/2 Teilchen, welches in der $S_z$-Basis durch die Dichtematrix $\rho_0$ beschrieben werden kann

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

**a)** Bestimmen Sie, ob dieses $\rho_0$ einen reinen Zustand beschreibt.

**b)** Berechnen Sie die Erwartungswerte einer Spin-Messung in $x$ und $y$-Richtung.

**c)** Es wird eine Messung des Spins in $z$-Richtung durchgeführt. Geben Sie die möglichen Messwerte sowie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an. Geben Sie für jedes mögliche Messergebnis die Dichtematrix des Systems unmittelbar nach der Messung an.

Viel Erfolg!