Technische Universität
Wien

Prof. A. Toschi, Prof. K. Held, Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch, DI T. Ribic

1. Test zur Quantentheorie II

Wintersemester 2017/2018

Freitag, **17.11.2017**.

Test B **Name:** **Matrikelnr.:**

B1	B2	B3	B4	Σ
11	14	12	13+4*	50+4*

1. Messungen mit einer Dichtematrix

2+4+5=11 Punkte

Betrachten Sie ein Spin-1/2 Teilchen, welches in der S_z-Basis durch die Dichtematrix ρ_0 beschrieben werden kann

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 2/5 & \sqrt{6}/5 \\ \sqrt{6}/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie, ob dieses ρ_0 einen reinen Zustand beschreibt.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte einer Spin-Messung in x und y-Richtung.

c) Es wird eine Messung des Spins in z-Richtung durchgeführt. Geben Sie die möglichen Messwerte sowie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an. Geben Sie für jedes mögliche Messergebnis die Dichtematrix des Systems unmittelbar nach der Messung an.

2. Theoriefragen

5+3+3+3=14 Punkte

a) Im Partialwellenformalismus ist die radiale Wellenfunktion eines gestreuten Teilchens $R_l(r) = e^{i\delta_l}\left(\cos(\delta_l) j_l(kr) - \sin(\delta_l) n_l(kr)\right)$. Ein Teilchen mit Energie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ werde an dem Potential $V(r) = \begin{cases} \infty & (r < b) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$ gestreut. (i) Welche Randbedingung impliziert dieses $V(r)$?
(ii) Drücken Sie die Streuphase für s-Wellen Streuung $\delta_{l=0}$ durch den Kugelradius b aus.
(iii) Berechnen Sie für kleine Energien den Beitrag der s-Wellen Streuung zum *totalen* Wirkungsquerschnitt. Entspricht das Ergebnis der klassischen Erwartung?

b) Geben Sie die Dichtematrix für den reinen Zustand $|\uparrow_x\rangle$ (spin-up in x-Richtung) in (i) der Basis $\{|\uparrow_x\rangle, |\downarrow_x\rangle\}$ und (ii) der Basis $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$ an.

c) Geben Sie eine Variationswellenfunktion an, mit der Sie die Grundzustandsenergie für das Potential $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 (x - x_0)^2 + |\beta|(x - x_0)^4$ nach Ritz sinnvoll (gut) abschätzen können.

d) Sei $H(t) = H_0 + f(t)V$ ein zeitabhängiger Hamiltonoperator, wobei H_0 und V zeitunabhängige, nicht kommutierende Operatoren im Schrödinger-Bild und $f(t)$ eine Funktion der Zeit sind. Das System befindet sich bei $t = 0$ im Zustand $|\psi_0\rangle$. Welche(r) der folgenden Ausdrücke beschreiben die korrekte Zeitentwicklung des Systems im Schrödinger-Bild?
(i) $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} e^{-\frac{i}{\hbar} f(t) V t} |\psi_0\rangle$, (ii) $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t) t} |\psi_0\rangle$, (iii) $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} U_I(t) |\psi_0\rangle$
(jeweils mit kurzer Begründung). $U_I(t)$ ist hier der Zeitentwicklung-Operator im WW-Bild. Was ändert sich im Fall, dass $f(t) = 1$?

3. Born'sche Näherung

6+6=12 Punkte

Ein Teilchen der Masse m wird an einem rotationssymmetrischen hard-shell Potential gestreut:

$$V(\vec{r}) = V_0 r_0 \delta(|\vec{r}| - r_0), \qquad V_0 > 0, r_0 > 0$$

a) Berechnen Sie die Streuamplitude $f(\theta, \phi)$ und den differentiellen Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi)$ in erster Born'scher Näherung. Betrachten Sie danach das Ergebnis für kleine Energien. Was können Sie in diesem Fall über die Winkelabhängigkeit sagen?

b) Geben Sie einen Ausdruck für die Wellenfunktion $|\psi^+_{\vec{k}}\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[G^+(\vec{k})U\right]^n\right)|\vec{k}\rangle$ bis Ordnung $n = 1$ in Ortsdarstellung an und werten Sie diesen für $\vec{r} = 0$ aus. Unter welchen Bedingungen an V_0 und r_0 ist im Fall kleiner Energien die Born'sche Näherung anwendbar?

4. Zeitabhängige Störungstheorie

4+4+2+4+3=13 + 4* Punkte*

Betrachten Sie ein atomares zwei-Niveau System mit den Basiszuständen $|g\rangle, |e\rangle$, welches an einen harmonischen Oszillator mit dem Erzeugungs-(Vernichtungs-)operator $a^\dagger(a)$ koppelt. Der Hamiltonoperator des Gesamtsystems hat folgende Gestalt:

$$H = \underbrace{\varepsilon|e\rangle\langle e| + \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)}_{H_0} + \underbrace{f(t)\Big(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|\Big)\left(a + a^\dagger\right)}_{H_1} \text{ mit } 0 < \varepsilon < \hbar\omega$$

a) Wir betrachten zuerst den Fall $f \equiv 0$. Geben Sie für H_0 die Energieeigenwerte und die entsprechenden Energieeigenzustände an. (Hinweis: Verwenden Sie hierzu die Basis $|i, n\rangle = |i\rangle \otimes |n\rangle$ mit $i = e, g$ (atomarer Zustand) und $n = 0, 1, .., \infty$ (Besetzung des Oszillators)).

b) Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das System im Grundzustand. Wir schalten eine in der Zeit lineare Störung ein:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda t/\tau & 0 < t \leq \tau \\ 0 & sonst. \end{cases} \tag{1}$$

Berechnen Sie in 1. Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie den Zustand des Systems $|\psi(t)\rangle$ zur Zeit $t = \tau$.

c) Berechnen Sie in 1. Ordnung Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit, das System für $t = \tau$ in einem Zustand mit Besetzung n des Oszillators zu finden.

d) (*Bonuspunkte*) Betrachten Sie jetzt den Fall des schnellen Ausschaltens der Störung zur Zeit $t = \tau$. Unter der Annahme, dass der Zustand des Systems durch $|\psi(t)\rangle$ aus Aufgabeteil b) beschrieben werden kann, berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System für $t > \tau$ in einem Zustand mit Besetzung n des Oszillators zu finden.

e) (*auch ohne* **a) - d)** *behandelbar*) Unter welchen Bedingungen an τ ist hier (wenn überhaupt) die adiabatische Näherung anwendbar?

Erinnerung aus Quantentheorie I: $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$

Viel Erfolg!