# 1. Plenum QT2 (WS 2019 - 2020)

a) $\hat{H}(t) = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}(t)$ $\qquad$ $\vec{\mu} = -\frac{g\mu_B}{\hbar}\vec{S} = -\frac{g\mu_B}{\cancel{\hbar}}\frac{\cancel{\hbar}}{2}\vec{\sigma}$

$$\hat{H}(t) = +\frac{\mu_B g}{2}\left[\underbrace{B_z\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{\hat{H}_0} + \underbrace{B_r\begin{pmatrix}0 & \cos(\omega t)-i\sin(\omega t)\\ \cos(\omega t)+i\sin(\omega t) & 0\end{pmatrix}}_{\hat{V}(t)}\right]$$

in der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

$$\hat{H}_0 = \underbrace{\frac{\mu_B g B_z}{2}}_{\Delta_0}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{V}(t) = \underbrace{\frac{\mu_B g B_r}{2}}_{\Gamma}\begin{pmatrix}0 & e^{-i\omega t}\\ e^{i\omega t} & 0\end{pmatrix}$$



b) $P_\uparrow(t) = \left( P_{\uparrow\leftarrow\downarrow}(t) \right.$ in diesem Fall, da $|\psi(t=0)\rangle = |\downarrow\rangle \left.\right)$ in 1. Ordnung Störungstheorie

$$P_\uparrow^{(1)}(t) = |a_{\uparrow\downarrow}^{(1)}(t)|^2 \quad \text{mit} \quad a_{fi}^{(1)} = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt'\, e^{i\omega_{fi}t'}V_{fi}(t')$$

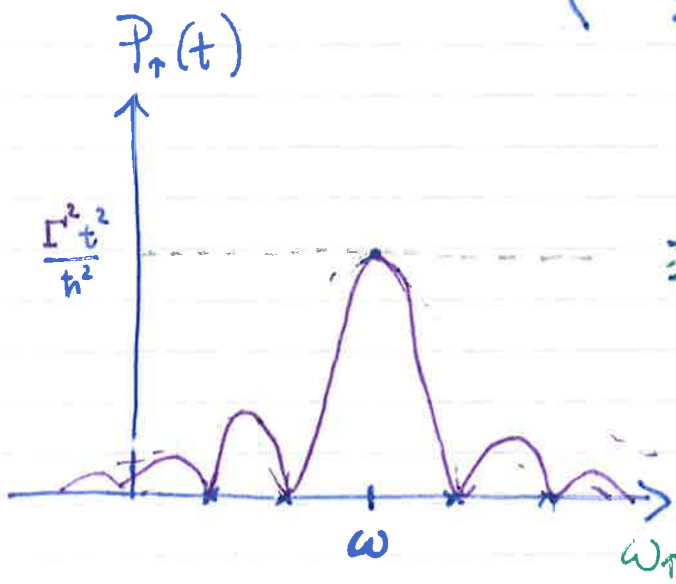
HIER: $$a_{\uparrow\downarrow}(t) = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt'\, e^{i\omega_{\uparrow\downarrow}t'}\langle\uparrow|\hat{V}(t')|\downarrow\rangle =$$

$$= \frac{\Gamma}{i\hbar}\int^{0} dt'\, e^{i(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)t'} = \frac{\Gamma}{i\hbar}\left[\frac{e^{i(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)t} - 1}{i(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)}\right]$$

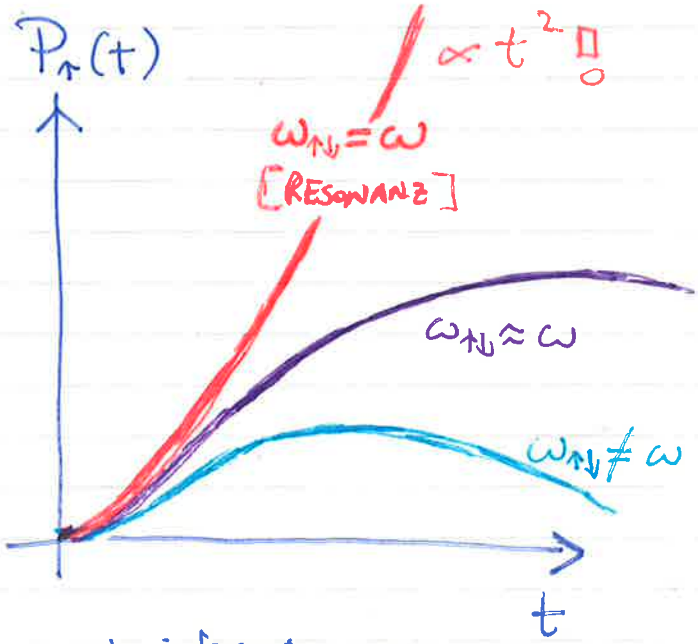
mit $\omega_{\uparrow\downarrow} = \frac{\varepsilon_\uparrow^0 - \varepsilon_\downarrow^0}{\hbar} = \frac{2\Delta_0}{\hbar}$

$$P_\uparrow^{(1)}(t) = \frac{\Gamma^2}{\hbar^2}\,\frac{\sin^2\left[\frac{(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)t}{2}\right]}{\left(\frac{\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega}{2}\right)^2}$$

c.f. periodische Störungen in der VO




bei fixierter $t$ (wie in der VO)




bei fixierte $\omega_{\uparrow\downarrow}$



c) Berechnung des EXAKTEN AUSDRUCKES von $P_\uparrow(t)$

Im W.W.-Bild : $P_\uparrow(t) = |\langle\uparrow|\psi_I(t)\rangle|^2$

wo $i\hbar \frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = V_I(t)|\psi_I(t)\rangle$

und $|\psi_I(t)\rangle = \sum_m c_m(t)\underbrace{|\psi_m^0\rangle}_{\text{Eigenzustände von } \hat{H}_0}$

$\Rightarrow$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\left[\sum_m c_m(t)|\psi_m^0\rangle\right] = \hat{V}_I(t)\left[\sum_m c_m(t)|\psi_m^0\rangle\right]$$

Wenn man beide Seiten der Gl. mal $\langle \psi_n^0 | \times$ multipliziert, bekommt man :

$$i\hbar \dot{c}_n(t) = \sum_m \langle \psi_n^0 | \hat{V}_I(t) | \psi_m^0 \rangle c_m(t)$$

$$= \sum_m e^{i\omega_{nm}t} V_{nm}(t)\, c_m(t)$$

HIER:

$$\begin{cases} i\hbar \dot{c}_\uparrow(t) = e^{i\omega_{\uparrow\downarrow}t} \langle \uparrow | \hat{V}(t) | \downarrow \rangle c_\downarrow(t) \\ i\hbar \dot{c}_\downarrow(t) = e^{i\omega_{\downarrow\uparrow}t} \langle \downarrow | \hat{V}(t) | \uparrow \rangle c_\uparrow(t) \end{cases}$$

mit $c_\uparrow(0) = \emptyset$ ; $c_\downarrow(0) = 1$ (5)

und, da $\langle \uparrow | \hat{V}(t) | \downarrow \rangle = \Gamma e^{-i\omega t}$ und $\omega_{\downarrow\uparrow} = -\omega_{\uparrow\downarrow}$

$$\Rightarrow \begin{cases} i\hbar \dot{c}_\uparrow(t) = \Gamma\, e^{i(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)t} c_\downarrow(t) \\ i\hbar \dot{c}_\downarrow(t) = \Gamma\, e^{-i(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)t} c_\uparrow(t) \end{cases}$$

- Exakte Lösung :

$$i\hbar \ddot{c}_\uparrow(t) = \Gamma [i(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)]\, e^{i(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)t} c_\downarrow(t) + \Gamma e^{i(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)t} \dot{c}_\downarrow(t)$$

mit

$$\begin{cases} \dot{c}_\downarrow(t) = \dfrac{\Gamma}{i\hbar} e^{-i(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)t} c_\uparrow(t) \\ \Gamma e^{i(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)t} c_\downarrow(t) = i\hbar \dot{c}_\uparrow(t) \end{cases}$$

(6)

$$\Rightarrow \quad i\hbar\, \ddot{c}_\uparrow(t) = i\hbar\left[i\left(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega\right)\right]\dot{c}_\uparrow(t) + \frac{\Gamma^2}{i\hbar}\, c_\uparrow(t)$$

zu lösen (exakt!)

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{c}_\uparrow(t) - i\left(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega\right)\dot{c}_\uparrow(t) + \dfrac{\Gamma^2}{\hbar^2}\, c_\uparrow(t) = \emptyset \\ c_\uparrow(0) = \emptyset \\ \dot{c}_\uparrow(0) = \dfrac{\Gamma}{i\hbar}\, c_\downarrow(0) = \dfrac{\Gamma}{i\hbar} \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = \emptyset \\ \text{mit } \alpha = 1\,;\; \beta = -i\left(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega\right);\; \gamma = \dfrac{\Gamma^2}{\hbar^2} \end{cases}$$

↳ zu lösen

7

$$\Delta = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} = \sqrt{-\left(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega\right)^2 - 4\frac{\Gamma^2}{\hbar^2}} = i\sqrt{\left(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega\right)^2 + 4\frac{\Gamma^2}{\hbar^2}} = i\Omega$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\beta/2\alpha \pm i\frac{\Omega}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = e^{-\beta/2a\, t}\left[A\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_\uparrow(t) = e^{-\frac{i(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)t}{2}}\left[A\cos\left(\dfrac{\Omega t}{2}\right) + B\sin\left(\dfrac{\Omega t}{2}\right)\right] \\ c_\uparrow(0) = \emptyset \rightarrow \boxed{A = \emptyset} \\ \dot{c}_\uparrow(0) = \dfrac{\Gamma}{i\hbar} \rightarrow \dfrac{\Omega}{2}B = \dfrac{\Gamma}{i\hbar} \rightarrow \boxed{B = \dfrac{2\Gamma}{i\hbar\Omega}} \end{cases}$$

8

$$c_\uparrow(t) = \frac{e^{-i\frac{(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)t}{2}}}{i} \frac{2\Gamma}{\hbar\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$

$$\boxed{P_\uparrow(t) = \langle\uparrow|\psi_I(t)\rangle = |c_\uparrow(t)|^2 = \frac{\Gamma^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right)}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2} \quad \text{mit } \Omega = \sqrt{(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)^2 + \frac{4\Gamma^2}{\hbar^2}}}$$

$\longrightarrow$ Exakte Lösung !

(9)

$\Rightarrow$ Mögliche Vergleiche

$$P_\uparrow^{(1)}(t) = \frac{\Gamma^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2\left[\frac{(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)t}{2}\right]}{\left(\frac{\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega}{2}\right)^2} \quad \text{vs.} \quad P_\uparrow^{\text{EXAKT}}(t) = \frac{\Gamma^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2\left[\frac{\Omega t}{2}\right]}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2}$$

$\Rightarrow$ Dieselbe Funktion aber mit unterschiedlichen Argumenten !

$$\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega \quad \text{vs.} \quad \Omega = \sqrt{(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)^2 + \frac{4\Gamma^2}{\hbar^2}}$$

Bei der Resonanz: $[\omega_{\uparrow\downarrow} \neq \omega]$ $\Downarrow$ $\emptyset$

$\Downarrow$ ✓ Bei der Resonanz: $2\Gamma/\hbar > \emptyset$

(10)

## mathematisch ...

Man kann einfach sehen, dass wenn $\Gamma \ll |\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega|$

$$\Omega = \sqrt{(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)^2 + \frac{4\Gamma^2}{\hbar^2}} = |\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega|\sqrt{1+\frac{4\Gamma^2}{\hbar^2(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)^2}}$$

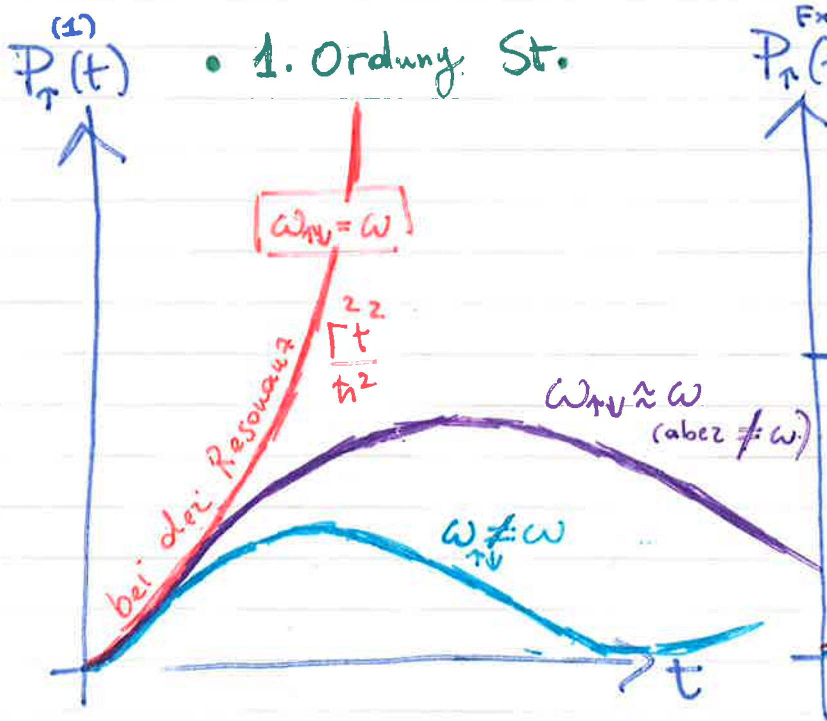
$$= |\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega|\left[1+o\left(\frac{\Gamma^2}{[\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega]}\right)\right]$$

$$P_1(t) \approx \underbrace{\frac{\Gamma^2}{\hbar}\,\frac{\sin^2\left[\frac{(\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega)t}{2}\right]}{\left(\frac{\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega}{2}\right)^2}}_{\Rightarrow\ 1.\text{ Ordnungs Ausdruck}}\left[1+o\left(\frac{\Gamma^2}{[\omega_{\uparrow\downarrow}-\omega]^2}\right)\right] \qquad (11)$$

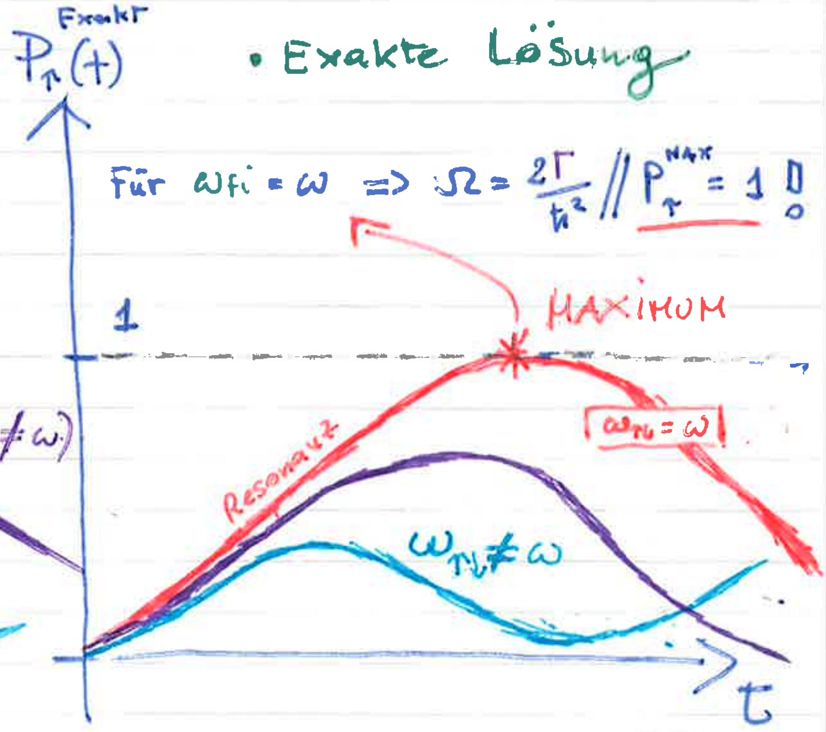
## ... und physikalisch

Ganz Konkret:

• 1. Ordnung St.




• Exakte Lösung




$\Rightarrow$ Rabi Oszillationen ! (12)