Technische Universität Wien

PD Dr. J. Tomczak, Prof. A. Toschi, Prof. K. Held

# 1. Test zur Quantentheorie II

*Wintersemester 2019/2020*

**Freitag**, **22.11.2019**.

**Test B** **Name:** **Matrikelnr.:**

| B1 | B2 | B3 | B4 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| 13 | 10 | 15 | 12+4* | 50+4* |

## 1. Verständnisfragen

*4+5+4=13 Punkte*

**a)** Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma - i\delta \\ \gamma - i\delta & \beta \end{pmatrix}$. Für welche $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, beschreibt A eine Dichtematrix, für welche einen reinen Zustand?

**b)** Sei $\hat{H}(t)$ ein Hamilton-Operator, der explizit *zeitabhängig* in der Schrödinger Darstellung ist. (i) Aus der entsprechenden Schrödinger Gleichung leiten Sie die Differentialgleichung für den Operator $\hat{U}(t)$ her, der die Zeitentwicklung des Systems in der Schrödinger Darstellung beschreibt [d.h. $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle$]. (ii) Geben Sie die Lösung der Differentialgleichung für $\hat{U}(t)$ in rekursiver Form an. (iii) Leiten Sie aus dieser allgemeinen Lösung einen kompakten Ausdruck für $\hat{U}(t)$ für den Fall her, dass $\hat{H}(t) = \hat{H}$ *zeitunabhängig* ist.

**c)** Ein Spin-1/2 befinde sich in einem Magnetfeld in $x$-Richtung und sei im Grundzustand $|\downarrow_x\rangle$. Zur Zeit $t = 0$ werde dann das Magnetfeld plötzlich in die $z$-Richtung gedreht. Wie entwickelt sich der Zustand des Spins für $t > 0$?

## 2. Dichtematrix für Quantenpunkte

*3+3+2+2=10 Punkte*

Zwei Quantenpunkte (1 und 2) befinden sich in einem Magnetfeld $B$ und koppeln mit einem anisotropen Austausch $J_z$>0 ($g$: Landé-Faktor, $\mu_B$: Bohrsches Magneton, $\hbar \equiv 1$):

$$\hat{H} = -J_z \hat{S}_z^1 \hat{S}_z^2 + g\mu_B \, B_z(\hat{S}_z^1 + \hat{S}_z^2)$$

Wir beschreiben die isolierten Quantenpunkte hier durch einen Spin-1/2 der jeweiligen Elektronen; $S_z^i$ ist die z-Komponente des Spins des $i$ten Quantenpunkts.

**a)** Berechnen Sie die Eigenvektoren und -werte des Problems für $B_z > 0$ und skizzieren sie die Eigenwerte als Funktion von $B_z$ (>0).

**b)** Geben Sie für den Grundzustand ($B_z > 0$) die Dichtematrix des Gesamtsystems und die reduzierte Dichtematrix für den 1. und 2. Quantenpunkt an.

**c)** Beschreiben die reduzierten Dichtematrizen einen reinen oder gemischten Zustand?

**d)** Berechnen Sie die von Neumann-Entropie des Gesamtsystems, sowie der Teilsysteme Quantenpunkt 1 und 2 und zeigen Sie, dass die Subadditivität der Entropie erfüllt ist.

## 3. Zeitabhängiges harmonisches System

*6+4+5=15 Punkte*

Der Hamiltonoperator eines zeitabhängigen harmonischen Problems mit Masse $m$ laute:

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\left(\omega^2 + f(t)\Omega^2\right)(\hat{x} - f(t)d)^2,$$

wo $d, \Omega$ reelle Konstante sind, und $f(t) = t/T$ für $0 \leq t < T$ und $f(t) = 1$ für $t \geq T$ eine reelle Zeitfunktion ist. Das System befindet sich bei $t = 0$ im Grundzustand $|0\rangle$ von $\hat{H}(t = 0) = \hat{H}_0$.

**a)** Betrachten Sie den Fall $\Omega = 0$, $d > 0$, und berechnen Sie wieder für $0 < t < T$ die Amplitude, $a_{10}(t)$, und die Wahrscheinlichkeit, $P_{1\leftarrow 0}(t)$, eines Übergangs vom Grundzustand in den 1. angeregten Zustand von $H_0$ als Funktion der Zeit in erster Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie. Unter welchen Bedingungen ist die Anwendung der zeitabhängigen Störungstheorie hier gerechtfertigt? [*Hinweis*: $\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$, mit $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$]

**b)** Betrachten Sie nun den Fall $d = 0$, $\Omega > 0$, und berechnen Sie für $0 < t < T$ die Amplitude, $a_{10}(t)$, und die Wahrscheinlichkeit, $P_{1\leftarrow 0}(t)$, eines Übergangs vom Grundzustand in den 1. angeregten Zustand von $\hat{H}_0$ als Funktion der Zeit in erster Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie.

**c)** Verwenden Sie nun die adiabatische Näherung und berechnen Sie die Energie $E(t)$ und den Zustand $\psi(x,t)$ dieses Systems als Funktion der Zeit für die zwei Fälle (i) $\Omega = 0$, $d > 0$ und (ii) $d = 0$, $\Omega > 0$. Unter welchen Bedingungen ist die adiabatische Näherung für dieses $\hat{H}(t)$ gerechtfertigt? [*Hinweis*: $\psi(x, t=0) = \pi^{-1/4} {x_0}^{-1/2} \exp(-\frac{x^2}{2x_0^2})$ mit $x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ ]

## 4. Streutheorie

*4+5+3+4*=12+4* Punkte*

Ein Teilchen der Masse $m$ streue an dem Zentralpotential

$$V(r) = V_0 \exp(-r/a_0) \qquad \text{mit } a_0, V_0 \in \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

**a)** Die erste Bornsche Näherung ist anwendbar, wenn Korrekturen höherer Ordnung klein sind. Vergleichen Sie bei $\mathbf{r} = 0$ die Wellenfunktion in erster Bornscher Näherung mit der einfallenden ebenen Welle, um dafür ein allgemeines Kriterium aufzustellen. Werten Sie selbiges für obiges Potential aus. In welchen Fällen ist die erste Bornsche Näherung also hier anwendbar?

**b)** Berechnen Sie den differentiellen Streuquerschnitt in erster Bornscher Näherung $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\phi)\big|_{\text{1.B.N.}}$. Skizzieren Sie diesen sinnvoll normiert für verschiedene Werte von $ka_0$ als Funktion von $\theta$ ($k$: Wellenvektor).

**c)** Berechnen Sie für obiges Potential den Beitrag der $s$-Wellenstreuung ($l = 0$) zum partiellen Streuquerschnitt in erster Bornscher Näherung. Unter welchen Voraussetzungen kann man sich auf Beiträge mit kleinem $l$ beschränken? *Hinweis:* $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$.

**d*)** (i) Entwickeln Sie die Streuamplituden aus **b)** und **c)** bis zur zweiten Ordnung in $ka_0$. Für welchen Winkel $\theta$ verschwinden dann alle Partialwellenbeiträge mit $l > 0$ in der 1. Bornschen Näherung? (ii) Berechnen Sie aus dem partiellen Streuquerschnitt aus **b)** den totalen Streuquerschnitt in erster Bornscher Näherung $\sigma\big|_{\text{1.B.N.}}$.

Viel Erfolg!