

## 2. Test zur Quantentheorie II

*Wintersemester 2019/2020*

**Freitag, 24.01.2020.**

<b>Test A</b>	<b>Name:</b>	<b>Matrikelnr.:</b>	A1	A2	A3	A4	Σ
			16	11+4*	10	13	50+4*

### 1. Theoriefragen

*3.5+4.5+3+5=16 Punkte*

- a) Betrachten Sie ein freies relativistisches Elektron. Welche der folgenden Operatoren (in Heisenberg Darstellung mit dem Dirac Hamiltonian  $\hat{H}_D$ ) sind in diesem Fall für beliebige Propagationsrichtungen Konstanten der Bewegung (jede richtige/falsche Antwort +/−0.5 Punkte)?  
 (i)  $\hat{O}_1 = \hat{p}_x^H$ ; (ii)  $\hat{O}_2 = \hat{y}^H$ ; (iii)  $\hat{O}_3 = \hat{V}_z = \partial_t \hat{z}^H$ ; (iv)  $\hat{O}_4 = \hat{S}_z^H = \frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma}_z^H$ ; (v)  $\hat{O}_5 = (\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x)^H$ ; (vi)  $\hat{O}_6 = (\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{p}})^H$ ; (vii)  $\hat{O}_7 = \hat{O}_4 + \hat{O}_5$ .
- b) Zeigen Sie explizit, dass die Erzeugungs-/Vernichtungsoperatoren  $\tilde{c}_\beta^\dagger$  und  $\tilde{c}_\beta$  in einer neuen Orthonormalbasis gegeben durch

$$\tilde{c}_\beta^\dagger = \sum_\alpha \langle \varphi_\alpha | \tilde{\varphi}_\beta \rangle c_\alpha^\dagger \quad \text{und} \quad \tilde{c}_\beta = \sum_\alpha \langle \tilde{\varphi}_\beta | \varphi_\alpha \rangle c_\alpha \quad (1)$$

den fermionischen Kommutationsrelation  $\{\tilde{c}_\beta^\dagger, \tilde{c}_{\beta'}\} = \delta_{\beta, \beta'}$  genügen, wenn die ursprünglichen Operatoren  $c_\alpha^\dagger, c_{\alpha'}$  diese erfüllen.

- c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Operatoren (i)  $n_{1\uparrow}$  und (ii)  $n_{2\uparrow}n_{2\downarrow}$  für die folgenden fermionischen Besetzungszustände: (a)  $|n_{1\uparrow}, n_{1\downarrow}, n_{2\uparrow}, n_{2\downarrow}\rangle = |1001\rangle$  und (b)  $1/\sqrt{2} (|1001\rangle + i|0011\rangle)$ . Hierbei ist  $n_{i\sigma} = c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma}$ .
- d) Gegeben ist der Spinor  $\Psi(\mathbf{r}, 0) = (\pi D^2)^{-3/4} \exp\left(-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{2D^2}\right) (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  zur Zeit  $t = 0$ . Berechnen Sie den Spinor  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  für kleine Zeiten  $t$  bis zur 1. Ordnung in  $t$ .

### 2. Ein relativistisches Spin=0-Teilchen im E.M. Feld *2+4+5+4\*=11+4\* Punkte*

Betrachten Sie ein relativistisches Teilchen mit Masse  $m$ , Ladung  $q$ , und Spin 0, welches durch die Klein-Gordon Gleichung beschrieben sei.

- a) Notieren Sie die Klein-Gordon Gleichung für das Teilchen, wenn sich dieses in einem elektromagnetischen Feld, beschrieben von dem Viererpotential  $A^\mu(\mathbf{x}) = (\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}))$  mit  $\mu = 0, 1, 2, 3$  und  $\mathbf{x} = (ct, \mathbf{r})$ , befindet.
- b) Betrachten Sie eine Eichtransformation, die unter anderem das Viererpotential wie folgt ändert:  $A^\mu(\mathbf{x}) \Rightarrow A'^\mu(\mathbf{x}) = A^\mu(\mathbf{x}) - \partial^\mu \Lambda(\mathbf{x})$  wobei  $\Lambda(\mathbf{x})$  eine skalare Funktion von  $\mathbf{x} = (ct, \mathbf{r})$  ist. Beweisen Sie, dass das System unter dieser Transformation eichinvariant ist.

Betrachten Sie jetzt den Fall der Klein-Gordon Gleichung für ein statisches Skalarpotential  $\Phi(\mathbf{r})$ , d.h.  $(i\hbar\partial_t - q\Phi(\mathbf{r}))^2 \psi(x) = \hat{p}^2 c^2 \psi(x) + m^2 c^4 \psi(x)$ .

- c) Entwickeln Sie letztere im nichtrelativistischen Limes, d.h. wenn  $i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x})$  mit  $E = mc^2 + \varepsilon$  und  $\varepsilon \ll mc^2$ .
- d\*) Verwenden Sie den Ausdruck, den Sie in c) erhalten haben bis zur ersten Ordnung in  $\varepsilon$  und lösen Sie die entsprechende Gleichung in einer Region, in der das Potential (ohne Berücksichtigung der Randbedingungen) als konstant angenommen werden kann, d.h.  $q\Phi = U$ , wobei  $0 < U < mc^2$ . Zeigen Sie dann, ob diese Gleichung eichinvariant ist oder nicht.

### 3. Nicht-wechselwirkende Fermionen & Bosonen

2+3+2+3=10 Punkte

Gegeben sei der folgende eindimensionale  $N$ -Teilchen Hamilton-Operator in 1. Quantisierung:

$$H = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2M} \hat{p}_i^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 \hat{x}_i^2 \right) \quad (2)$$

- a) Wir betrachten nun den Spezialfall mit  $N = 2$  Spin- $\frac{1}{2}$  Fermionen. Geben Sie die Energien und Entartungsgrade (i) des Grundzustandes und (ii) des 1. angeregten Zustands an.
- b) Geben Sie für *entartete* Zustände aus a) die Wellenfunktionen in 1. Quantisierung an. Die Eigenzustände des harmonischen Oszillators,  $|\Psi_m\rangle$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), können Sie hierbei voraussetzen.
- c) Betrachten Sie nun  $N = 2$  Bosonen mit Spin 0. Geben Sie wiederum die Energien und Entartungsgrade (i) des Grundzustandes und (ii) des 1. angeregten Zustands an.
- d) Geben Sie die Wellenfunktion(en) des 1. angeregten Zustands aus c) in 1. Quantisierung an.

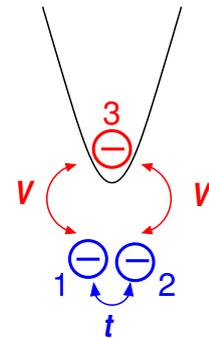
### 4. AFM-Spitze

4+4.5+4.5=13 Punkte

Ein  $H_2$  Molekül wird mit einem *atomic force microscope* (AFM) untersucht. Wir beschreiben die Spitze des AFM nur durch ein einzelnes Atom mit einem einzelnen Orbital  $|\Psi_3\rangle$  an der Spitze und erhalten unter Vernachlässigung der Wechselwirkung am gleichen Gitterplatz:

$$H = \underbrace{-t \sum_{\sigma} (c_{1,\sigma}^{\dagger} c_{2,\sigma} + \text{h.c.})}_{H_0} + V \sum_{\sigma, \sigma'} \sum_{i=1}^2 n_{3\sigma} n_{i\sigma'} + \Delta \sum_{\sigma} n_{3\sigma} \quad (3)$$

Hierbei ist  $V > 0$  die Coulombabstoßung zwischen Spitze und  $H_2$ -Atomen, und  $t > 0$  das "Hüpfen" zwischen den H-Atomen;  $\Delta > 0$  beschreibt den Unterschied der orbitalen Energie zwischen den H und dem AFM-Atom;  $n_{j\sigma} = c_{j\sigma}^{\dagger} c_{j\sigma}$ .



- a) Bestimmen Sie zunächst den Grundzustand, dessen Entartung und Energie von  $H_0$  für zwei Elektronen.
- b) Berechnen Sie die Kommutatoren von  $H$  mit (i)  $\sum_{\sigma} n_{1\sigma}$ , (ii)  $\sum_{\sigma} n_{3\sigma}$  und (iii)  $\sum_{\sigma} (n_{1\sigma} + n_{2\sigma})$ . Was lernen Sie daraus?
- c) Bestimmen Sie nun den Grundzustand von  $H$  für 3 Elektronen in Abhängigkeit von  $V$ .

Viel Erfolg!