Technische Universität Wien

PD Dr. J. Tomczak, Prof. A. Toschi, Prof. K. Held

2. Test zur Quantentheorie II

Wintersemester 2019/2020

Freitag, 24.01.2020.

Test B **Name:** **Matrikelnr.:**

B1	B2	B3	B4	Σ
10	13	16	11+4*	50+4*

1. Nicht-wechselwirkende Fermionen & Bosonen

2+3+2+3=10 Punkte

Gegeben sei der folgende eindimensionale N-Teilchen Hamilton-Operator in 1. Quantisierung:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2M}\hat{p}_i^2 + \frac{1}{2}M\omega^2\hat{x}_i^2 \right) \tag{1}$$

a) Wir betrachten nun den Spezialfall mit $N = 2$ Spin-$\frac{1}{2}$ Fermionen. Geben Sie die Energien und Entartungsgrade (i) des Grundzustandes und (ii) des 1. angeregten Zustands an.

b) Geben Sie für *entartete* Zustände aus **a)** die Wellenfunktionen in 1. Quantisierung an. Die Eigenzustände des harmonischen Oszillators, $|\Psi_m\rangle$ $(m = 0, 1, 2, \dots)$, können Sie hierbei voraussetzen.

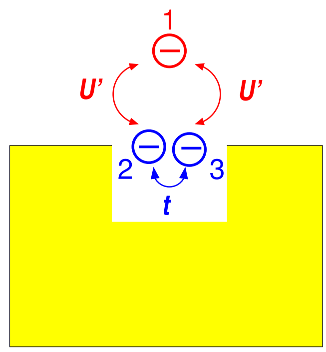
c) Betrachten Sie nun $N = 2$ Bosonen mit Spin 0. Geben Sie wiederum die Energien und Entartungsgrade (i) des Grundzustandes und (ii) des 1. angeregten Zustands an.

d) Geben Sie die Wellenfunktion(en) des 1. angeregten Zustands aus **c)** in 1. Quantisierung an.

2. Adatom auf Oberfläche

4+4.5+4.5=13 Punkte

Ein H-Atom (Gitterplatz 1) befindet sich auf einer Oberfläche, die wir einfachheitshalber als nicht-wechselwirkend mit lediglich 2 Gitterplätzen (2 und 3) beschreiben. Das führt auf folgenden Hamilton-Operator:



$$H = \overbrace{-t\sum_{\sigma}(c^{\dagger}_{2,\sigma}c_{3,\sigma} + \text{h.c.})}^{H_0} + U'\sum_{\sigma,\sigma'}\sum_{i=2}^{3} n_{1\sigma}n_{i\sigma'} + \varepsilon_0 \sum_{\sigma} n_{1\sigma} \tag{2}$$

Hierbei ist $U' > 0$ die Coulombabstoßung zwischen einem Elektron auf dem H-Atom und einem auf einem Oberflächen-Atom, $t > 0$ beschreibt das "Hüpfen" auf der Oberfläche; $\varepsilon_0 > 0$ die Bindungsenergie des H-Atoms bzw. der Unterschied zu der auf der Oberfläche; $n_{j\sigma} = c^{\dagger}_{j\sigma}c_{j\sigma}$.

a) Bestimmen Sie zunächst den Grundzustand, dessen Entartung und Energie von H_0 für zwei Elektronen.

b) Berechnen Sie die Kommutatoren von H mit (i) $\sum_\sigma n_{1\sigma}$, (ii) $\sum_\sigma n_{3\sigma}$ und (iii) $\sum_\sigma (n_{2\sigma} + n_{3\sigma})$. Was lernen Sie daraus?

c) Bestimmen Sie nun den Grundzustand von H für 3 Elektronen in Abhängigkeit von U'.

3. Theoriefragen *4.5+3+3.5+5=16 Punkte*

a) Zeigen Sie explizit, dass die Erzeugungs-/Vernichtungsoperatoren $\tilde{a}^\dagger_\beta$ und $\tilde{a}_\beta$ in einer neuen Orthonormalbasis gegeben durch

$$\tilde{a}^\dagger_\beta = \sum_\alpha \langle\varphi_\alpha|\tilde{\varphi}_\beta\rangle a^\dagger_\alpha \quad \text{und} \quad \tilde{a}_\beta = \sum_\alpha \langle\tilde{\varphi}_\beta|\varphi_\alpha\rangle a_\alpha \tag{3}$$

den bosonischen Kommutationsrelation $[\tilde{a}_\beta, \tilde{a}^\dagger_{\beta'}] = \delta_{\beta,\beta'}$ genügen, wenn die ursprünglichen Operatoren $a^\dagger_\alpha$, $a_{\alpha'}$ diese erfüllen.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Operatoren (i) $n_{1\uparrow}$ und (ii) $n_{2\uparrow}n_{2\downarrow}$ für die folgenden fermionischen Besetungszahlzustände: (a) $|n_{1\uparrow}, n_{1\downarrow}, n_{2\uparrow}, n_{2\downarrow}\rangle = |1001\rangle$ und (b) $1/\sqrt{2}\,(|1001\rangle + i|0011\rangle)$. Hierbei ist $n_{i\sigma} = c^\dagger_{i\sigma}c_{i\sigma}$.

c) Betrachten Sie ein freies relativistisches Elektron. Welche der folgenden Operatoren (in Heisenberg Darstellung mit dem Dirac Hamiltonian $\hat{H}_D$) sind in diesem Fall für beliebige Propagationsrichtungen Konstanten der Bewegung (jede richtige/falsche Antwort +/−0.5 Punkte)? (i) $\hat{\mathcal{O}}_1 = \hat{y}^H$; (ii) $\hat{\mathcal{O}}_2 = \hat{p}^H_x$; (iii) $\hat{\mathcal{O}}_3 = (\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x)^H$; (iv) $\hat{\mathcal{O}}_4 = \hat{V}_z = \partial_t \hat{z}^H$; (v) $\hat{\mathcal{O}}_5 = \hat{S}^H_z = \frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma}^H_z$; (vi) $\hat{\mathcal{O}}_6 = (\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{p}})^H$; (vii) $\hat{\mathcal{O}}_7 = \hat{\mathcal{O}}_3 + \hat{\mathcal{O}}_5$.

d) Gegeben ist der Spinor $\Psi(\mathbf{r},0) = \left(\pi\Gamma^2\right)^{-3/4} \exp\left(-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})^2}{2\Gamma^2}\right)(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$ zur Zeit $t = 0$. Berechnen Sie den Spinor $\Psi(\mathbf{r},t)$ für kleine Zeiten t bis zur 1. Ordnung in t.

4. Ein relativistisches Spin=0-Teilchen im E.M. Feld *2+4+5+4*=11+4* Punkte*

Betrachten Sie ein relativistisches Teilchen mit Masse m, Ladung q, und Spin 0, welches durch die Klein-Gordon Gleichung beschrieben sei.

a) Notieren Sie die Klein-Gordon Gleichung für das Teilchen, wenn sich dieses in einem elektromagnetischen Feld, beschrieben von dem Viererpotential $A^\mu(\mathrm{x}) = (\Phi(\mathrm{x}), \mathbf{A}(\mathrm{x}))$ mit $\mu = 0,1,2,3$ und $\mathrm{x} = (ct, \mathbf{r})$, befindet.

b) Betrachten Sie eine Eichtransformation, die unter anderem das Viererpotential wie folgt ändert: $A^\mu(\mathrm{x}) \Rightarrow A'^\mu(\mathrm{x}) = A^\mu(\mathrm{x}) - \partial^\mu\Lambda(\mathrm{x})$ wobei $\Lambda(\mathrm{x})$ eine skalare Funktion von $\mathrm{x} = (ct, \mathbf{r})$ ist. Beweisen Sie, dass das System unter dieser Transformation eichinvariant ist.

Betrachten Sie jetzt den Fall der Klein-Gordon Gleichung für ein statisches Skalarpotential $\Phi(\mathbf{r})$, d.h. $(i\hbar\partial_t - q\Phi(\mathbf{r}))^2\,\psi(x) = \hat{p}^2c^2\psi(x) + m^2c^4\psi(x)$.

c) Entwickeln Sie letztere im nichtrelativistischen Limes, d.h. wenn $i\hbar\,\partial_t\psi(\mathrm{x}) = E\,\psi(\mathrm{x})$ mit $E = mc^2 + \varepsilon$ und $\varepsilon \ll mc^2$.

d*) Verwenden Sie den Ausdruck, den Sie in **c)** erhalten haben bis zur ersten Ordnung in ε und lösen Sie die entsprechende Gleichung in einer Region, in der das Potential (ohne Berücksichtigung der Randbedingungen) als konstant angenommen werden kann, d.h. $q\Phi = U$, wobei $0 < U < mc^2$. Zeigen Sie dann, ob diese Gleichung eichinvariant ist oder nicht.

Viel Erfolg!