Technische Universität Wien

PD Dr. J. Tomczak, Prof. A. Toschi, Prof. K. Held

1. Übung zur Quantentheorie II

Wintersemester 2019/2020

TUTORIUM: Freitag, 11.10.2019.

1. Zeitentwicklung in verschiedenen Darstellungen *1+2+2+2+2+1=10 Punkte*

a) Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$, der sich bei $t = 0$ im Zustand $|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ befindet (mit $\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})|n\rangle$). Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Zustandes $|\Psi(t=0)\rangle$ sowie die Erwartungswerte der Observablen $\hat{x}$ und $\hat{p}$ für alle $t > 0$ in der (üblichen) Schrödinger-Darstellung.

b) Beweisen Sie die folgende Gleichung: $\mathrm{e}^{\hat{A}}B\mathrm{e}^{-\hat{A}} = \hat{B} + \frac{1}{1!}[\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \cdots$ für die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$. [*Hinweis*: Definieren Sie die Funktion $f(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-\lambda\hat{A}}$ und drücken Sie Ihren Wert bei $\lambda = 1$ als Taylor-Entwicklung von $\lambda = 0$ aus.]

c) Verwenden Sie die Relation aus **1b)**, um den expliziten Ausdruck der Operatoren $\hat{x}_H(t)$ und $\hat{p}_H(t)$ in der Heisenberg-Darstellung (i) für das freie System ($H_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}$), (ii) für das System: $H = H_0 - F_0\hat{x}$, d.h. ein Teilchen, auf welches eine konstante Kraft F_0 wirkt; (iii) für den harmonischen Oszillator aus **1a)**.

d) Berechnen Sie die expliziten Ausdrücke der Leiteroperatoren ($\hat{a}_H$, $\hat{a}_H^\dagger$) des harmonischen Oszillators von Beispiel **1a)** aus der entsprechenden Heisenberg-Bewegungsgleichung und verwenden Sie diese, um den Ausdruck der Operatoren $\hat{x}_H(t)$ und $\hat{p}_H(t)$ zu berechnen. Verifizieren Sie, dass man dieselben Ausdrücke wie in **1c)** bekommt. Berechnen Sie auch den Kommutator $[\hat{x}_H(t), \hat{p}_H(t')]$.

e) Berechnen Sie nun die Erwartungswerte der Operatoren $\hat{x}_H(t)$ und $\hat{p}_H(t)$ für dasselbe System wie in **1a)**, und vergleichen Sie die Ergebnisse der Schrödinger- und Heisenberg-Darstellungen.

f) Betrachten Sie nun den getriebenen harmonischen Oszillator $\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - F(t)\hat{x}$ mit einer zeitabhängigen Kraft $F(t)$. Geben Sie die Bewegungsgleichung für den Zustand des Systems $|\Psi(t)\rangle$ im Schrödinger- und im Wechselwirkungs-Bild an, sowie die entsprechenden Bewegungsgleichungen für die Observablen $\hat{x}$ und $\hat{p}$.
Ist es nun möglich, einen kompakten Ausdruck in exponentieller Form für den Zeitentwicklungsoperator im Schrödinger-Bild (etwa $U(t) = \mathrm{e}^{\frac{-i\hat{H}(t)\,t}{\hbar}}$) zu finden?

2. Zeitunabhängige Störungstheorie für gekoppelte Spins

1+2+2=5 Punkte

Es sei ein System zweier gekoppelter Spins in einem konstanten Magnetfeld entlang der z-Achse gegeben, dessen Hamiltonoperator lautet:

$$H = \frac{\mu}{\hbar}\,(\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \cdot \vec{B} + \alpha\,\frac{J}{\hbar^2}\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

mit $\mu, J, \alpha > 0$, $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ [$\vec{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$ sind die Pauli Matrizen], und $\vec{B} = (0, 0, B_0)$. Alle räumlichen Freiheitsgrade werden vernachlässigt.

a) Betrachten Sie erst den ungekoppelten Fall ($\alpha = 0$), und drücken Sie explizit den Hamiltonoperator in der Basis $\{|s_z\rangle_1 \otimes |s_z\rangle_2\}$ (mit $s_z =\uparrow, \downarrow$) aus. Bestimmen Sie die entsprechenden Eigenvektoren, Eigenwerte und deren Entartung.

b) Betrachten Sie nun den gekoppelten Fall ($\alpha > 0$) und berechnen Sie mit der zeitunabhängigen Störungstheorie die erste Ordnung der Korrekturen für die Energie-Eigenwerte von **2a)**.

c) Finden Sie den *exakten* Ausdruck der Eigenwerte und Eigenzustände von H (mit $\alpha \neq 0$), und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den entsprechenden Resultaten aus **2b)**. Was kann man für die Korrekturterme höherer Ordung in der Störungstheorie für dieses Problem erwarten? Wie sind die Resultate von **2b)** physikalisch zu interpretieren?