Technische Universität Wien

PD Dr. J. Tomczak, Prof. A. Toschi, Prof. K. Held

2. Übung zur Quantentheorie II

Wintersemester 2019/2020

<u>TUTORIUM</u>: Freitag, 25.10.2019.

3. Methoden zeitabhängiger Störungstheorie

1+3+3+2=9 Punkte

Ein quantenmechanischer Rotor mit Drehimpuls ($l = 1$) wird einem zeitabhängigen Magnetfeld ausgesetzt. Der zugehörige Hamiltonoperator lautet:

$$\hat{H}(t) = \frac{\mathbf{L}^2}{2I} + g_L \mu_B \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}(t) \quad \text{mit } I, g_L, \mu_B > 0$$

Das Magnetfeld sei durch

$$\mathbf{B}(t) = (B_0, 0, B_0 f(t))$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\hbar/\Gamma} \cos(\omega t) & t \leq \hbar/\Gamma \\ \cos(\omega t) & t > \hbar/\Gamma \end{cases}$$

($\Gamma > 0$ und $\omega \geq 0$) beschrieben. Das System befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Grundzustand. Der zeitabhängige Anteil des Hamiltonoperators soll als Störterm betrachtet werden. Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir ein unendliches Trägheitsmoment an.

a) Berechnen Sie für den Zeitpunkt $t = 0$ (d.h. für den ungestörten Hamiltonoperator $\hat{H}_0 = \hat{H}(t = 0)$) den Grundzustand und den ersten angeregten Zustand des Systems.

Wir berechnen nun (auf drei verschiedenen Wegen) die Wahrscheinlichkeit P_{10}, das System für $t > 0$ im ersten angeregten Zustand (aus Punkt **a**) anzutreffen:

b) Benutzen Sie die erste Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie zur Bestimmung von P_{10}. Sie brauchen den Endausdruck nicht auszumultiplizieren. Unter welcher Bedingung ist hier Fermis Goldene Regel anwendbar?

c) “Sudden approximation”: Unter welchen Bedingungen an Γ und ω ist diese Näherung auf obiges Problem anwendbar? Berechnen Sie dann P_{10} für einen beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ in dieser Näherung.

d) “Adiabatische Näherung”: Unter welchen Bedingungen an Γ und ω kann man diese Näherung auf obiges Problem anwenden? Wählen Sie dann einen adequaten Wert für ω und berechnen Sie P_{10} zum fixierten Zeitpunkt $t_A = \frac{\hbar}{2\Gamma}$.

4. Gestörter harmonischer Oszillator *1.5+0.5=2 Punkte*

Betrachten Sie ein, sich im Grundzustand befindendes, Teilchen der Masse m und der Ladung e in einem harmonischen Potential: $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + \frac{1}{2}m\omega\hat{x}^2$. Zur Zeit $t = 0$ wird abrupt ein homogenes elektrisches Feld E angelegt, welches jedoch exponentiell abklingt: $\hat{V}(t) = -eE\hat{x}\theta(t)\exp(-t/\tau)$, mit $\tau > 0$.

a) Berechnen Sie in 1. Ordnung Störungstheorie die Übergangsrate in den 1. angeregten Zustand.

b) Was finden Sie für lange Zeiten? Schätzen Sie ab, für welches Zeitintervall die 1. Ordnung Störungsrechnung akkurat ist. Diskutieren Sie den Fall $\tau \longrightarrow \infty$.

5. Dichtematrix und verschränkte Zustände *1+1+1+1=4 Punkte*

Betrachten Sie ein quantenmechanisches System, welches aus zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen besteht. Mit den Spin-Operatoren $\mathbf{S}_i = \frac{\hbar}{2}(\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z)$ sei der Hamilton-Operator gegeben durch

$$\hat{H} = -\frac{g}{\hbar}\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2, \tag{1}$$

wobei σ_i^α $(\alpha = x, y, z)$ die Pauli-Matrizen für den Spin $i = 1, 2$ sind und $g \in \mathbb{R}$.

a) Stellen Sie $\hat{H}$ in der Basis $|J, M\rangle$ des Gesamtdrehimpulses $\mathbf{J} = \mathbf{S_1} + \mathbf{S_2}$ dar.

b) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\psi(t = 0)\rangle = |\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 \equiv |\uparrow\downarrow\rangle$. Berechnen Sie die Wellenfunktionen $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$.

Ein Zustand $|\phi\rangle$ eines aus zwei (oder mehreren) Teilsystemen bestehenden Gesamtsystems wird als *verschränkt* bezeichnet, wenn er sich *nicht* als direktes Produkt von Zuständen $|\phi\rangle_1$ und $|\phi\rangle_2$ der Teilsysteme 1 und 2 schreiben läßt, d.h. es existieren keine $|\phi\rangle_1$ und $|\phi\rangle_2$, sodass $|\phi\rangle = |\phi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2$.

c) Zu welchen Zeiten $t \geq 0$ ist der Zustand $|\psi(t)\rangle$ aus **b)** nicht verschränkt?

Gekoppelte Spins können auch in Quantencomputern zum Einsatz kommen: Eine elementare Operation (Quantengatter) ist z.B. das Vertauschen (SWAP) einzelner Qubits.

d) Betrachten Sie das System in der Basis der einzelnen Spins, $|1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$, $|2\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$, $|3\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle$, $|4\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$. Zeigen Sie, dass für bestimmte Zeiten t^* und bis auf triviale Phasen, die Kopplung der Spins in Gl. (1) das folgende SWAP Gatter realisiert: $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\} \xrightarrow{\hat{H}} \{|1\rangle, |3\rangle, |2\rangle, |4\rangle\}$.

Hinweis: Die Clebsch-Gordan Koeffizienten $\langle m_1, m_2|J, M\rangle$ für zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen lauten:

$M = -1$

m_1,m_2 \ J	1
$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	1

$M = 0$

m_1,m_2 \ J	1	0
$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$
$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/2}$

$M = 1$

m_1,m_2 \ J	1
$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	1