Technische Universität Wien

PD Dr. J. Tomczak, Prof. A. Toschi, Prof. K. Held

4. Übung zur Quantentheorie II

Wintersemester 2019/2020

TUTORIUM: Freitag, 6.12.2019.

9. Streuung an einem Würfel — *2+0.5=2.5 Punkte*

Ein Teilchen, welches entlang der z-Achse mit Impuls $\mathbf{k} = (0, 0, k)$ fliegt, werde von einem kubischen Festkörper bei $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$ elastisch gestreut. Das entsprechende Streupotential lässt sich schreiben als $V(x, y, z) = V_0$ für $|x|$, $|y|$, $|z| \leq L$ und ansonsten $V(x, y, z) = 0$.

a) Berechnen Sie in 1. Bornscher Näherung den differentiellen Streuquerschnitt.

b) Berechnen Sie den totalen Streuquerschnitt im Limes kleiner Energie des einfallenden Teilchens (d.h. $kL \ll 1$) unter der Annahme, dass V_0 dennoch klein genug ist für die Gültigkeit der 1. Bornschen Näherung.

10. Spin, Drehimpuls, Helizität & Chiralität — *1+2.5+1.5+1+1.5+1=8.5 Punkte*

a) Betrachten Sie die 4-er Spinoren aus der Vorlesung, welche die Lösung der Dirac Gleichung für ein freies Teilchen der Masse m und Impuls $\mathbf{p} = (p_x, 0, 0)$ darstellen. Selbige kann man als Komposition von zwei 2-er Spinoren schreiben:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-iE_p t/\hbar + ip_x x/\hbar}. \tag{1}$$

Leiten Sie nun aus den Differentialgleichungen für ϕ und χ Differentialgleichungen für die Kombinationen $\xi = \phi + \chi$ und $\eta = \phi - \chi$ ab und zeigen Sie, dass die Kopplung von ξ und η nur über den Masseterm erfolgt. Diese Darstellung nennt man die *chirale Form*.

b) (i) Geben Sie die Lösung der chiralen Form der Dirac-Gleichung für masselose Teilchen (die sogenannte *Weyl-Gleichung*) an und zeigen Sie, dass die relativistische Energie-Impuls Beziehung folgt. (ii) Zeichnen Sie letztere für den Fall masseloser Teilchen und vergleichen Sie mit der Energie-Impuls-Beziehung eines nicht-relativistischen freien Teilchens. Angewendet auf welche physikalischen Systeme gibt die Weyl-Gleichung eine gute (evtl. näherungsweise) Beschreibung? (iii) Schreiben Sie den Hamilton Operator $\hat{H}_D = \hat{\alpha}\hat{\mathbf{p}}$ für masselose Teilchen in der chiralen Darstellung (geben Sie die explizite Form von $\hat{\alpha}$ an).

c) Schreiben Sie die 4-er Spinoren, die der Dirac Gleichung für ein relativistisches Teilchen ($E > 0$) bzw. Antiteilchen ($E < 0$) mit $\mathbf{p} = (p_x, 0, 0)$ genügen, in der chiralen Darstellung. Betrachten Sie dann den Grenzfall $|\mathbf{p}| \gg m$. Schreiben Sie die resultiereden 4-er Spinoren in der (standard) Pauli-Dirac Darstellung.

Betrachten Sie nun den in der Vorlesung diskutierten Dirac Operator für ein freies Teilchen in der Pauli-Dirac Darstellung:

$$\hat{H}_D = c\hat{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}mc^2 \tag{2}$$

d) Berechnen Sie den Kommutator des Spin Operators $\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix}$ mit $\hat{H}_D$. In welchem Fall ist der Spin eine Erhaltungsgrösse des Systems?

e) Berechnen Sie den Kommutator des Drehimpuls Operators $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ mit $\hat{H}_D$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil **d)**: Was legt dieser Vergleich nahe?

f) Berechnen Sie den Kommutator des Helizitäts Operators $\hat{\lambda} = \frac{\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{p}}}{|\mathbf{p}|}$ mit $\hat{H}_D$. Wann ist die Helizität eine Erhaltungsgrösse?

11. Galilei Transformation der Schrödinger Gleichung *1+2+1=4 Punkte*

Ein Inertialsystem S' bewege sich relativ zum Inertialsystem S mit konstanter Geschwindigkeit $v > 0$ in positive x-Richtung, wobei die Koordinatenachsen von S und S' parallel zueinander sind und die Ursprünge der Systeme zum Zeitpunkt $t = 0$ zusammenfallen.

a) Geben Sie die entsprechenden klassischen (Galilei) Transformationen für $t \to t'$, $\mathbf{r} \to \mathbf{r}'$ und $\mathbf{p} \to \mathbf{p}'$ an.

b) In der Quantenmechanik ist diese Galilei Transformation durch folgenden unitären Operator gegeben:

$$\hat{G}(v,t) = e^{-i\frac{v}{\hbar}(m\hat{x} - t\hat{p}_x)}, \tag{3}$$

wobei $m > 0$ die Masse des Teilchens ist. Zeigen Sie, dass die freie Schrödinger Gleichung unter dieser Transformation invariant ist, d.h., dass gilt,

$$\hat{G}^\dagger(v,t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_0\right)\hat{G}(v,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_0, \tag{4}$$

mit $\hat{H}_0 = \hat{p}^2/(2m)$ (*Hinweis:* $e^{X+Y} = e^X e^Y e^{-\frac{1}{2}[X,Y]}$, wenn $[X,[X,Y]] = [Y,[X,Y]] = 0$).

c) Betrachten Sie nun die eindimendionale Schrödinger Gleichung für das folgende zeitabhängige Potential:

$$\hat{V}(\hat{x},t) = \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x} - vt)^2, \quad v > 0. \tag{5}$$

Bestimmen Sie die Lösung $\psi(x,t)$ der Schrödinger Gleichung unter der Anfangsbedingung $\psi(x, t=0) = \psi_0(x) = \sqrt{\frac{a}{\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{(ax)^2}{2} + i\frac{vm}{\hbar}x}$ mit $a = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$.