Technische Universität Wien

PD Dr. J. Tomczak, Prof. A. Toschi, Prof. K. Held

5. Übung zur Quantentheorie II

Wintersemester 2019/2020

TUTORIUM: Freitag, 13.12.2019.

12. Lorentz-Transformation eines Spinors

1+2+2+2+2=9 Punkte

Gegeben sei die Spinorwellenfunktion eines freien Teilchens, welches sich mit dem Impuls $\hat{\mathbf{p}} = (0, 0, m\gamma v)^T$, $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, in z-Richtung bewegt:

$$\psi(\mathbf{r}, t) \;\propto\; e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\sqrt{(cp)^2+(mc^2)^2}\,t - pz\right)} \begin{pmatrix} \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2} + mc^2 \\ 0 \\ \mathrm{cp} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Dieser Spinor soll mit einer aktiven Lorentz Transformation mit Geschwindigkeit $-\frac{v}{c} = -\frac{cp}{E} = -\frac{cp}{\sqrt{(cp)^2+(mc^2)^2}}$ in z-Richtung transformiert werden.

a) Welches Ergebnis würden Sie erwarten?

b) Lorentz-transformieren Sie zunächst nur die Raum-Zeit Koordinaten von $\psi(\mathbf{r}, t)$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der, aus der Vorlesung bekannten, Formel $\hat{\mathcal{L}} = e^{\frac{\lambda}{2}\hat{\alpha}_z}$ dass die Transformationsmatrix $\hat{\mathcal{L}}$ im Spinraum die Gestalt $\hat{\mathcal{L}} = \mathbb{1}\cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \alpha_z \sinh\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ hat.

d) Benutzen Sie das Ergebnis aus Teil **c)**, um nun auch den Spinor in das bewegte Bezugssystem zu transformieren. *Hinweis:* $\cosh(\lambda) = \gamma \Rightarrow \cosh(\frac{\lambda}{2}) = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}$ und $\sinh(\frac{\lambda}{2}) = -\frac{v}{c}\frac{\gamma}{1+\gamma}\cosh(\frac{\lambda}{2})$.

e) Transformieren Sie nun den Spinor aus **d)** mit einer aktiven Drehung von (i) $\phi = \pi/2$, (ii) $\phi = \pi$, (iii) $\phi = 2\pi$ um die y-Achse.

13. Fermionen und Bosonen

1+1,5+1,5+2=6 Punkte

Betrachten Sie den folgenden Hamilton Operator zweier harmonischer Oszillatoren ($i = 1, 2$):

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_1 + \Delta_2) + \frac{1}{2}mw^2\left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2\right) \tag{2}$$

a) Berechnen Sie den Grundzustand des Hamilton Operators (2) unter der Annahme, dass es keine Beschränkungen an die Symmetrie der durch ihn beschriebenen Teilchen gibt.

b) Nehmen Sie nun an, die durch (2) beschriebenen Teilchen seien *Fermionen*. Wenden Sie den Antisymmetrisierungsoperator $\mathcal{A}$ auf den Grundzustand aus Teil **a)** an. Was für eine Wellenfunktion erhalten Sie?

c) Nehmen Sie nun an, die Teilchen seien *Bosonen*. Wenden Sie den Symmetrisierungsoperator $\mathcal{S}$ auf den Grundzustand aus Teil **a)** an. Was für eine Wellenfunktion erhalten Sie?

d) Berechnen Sie für die Fälle **b)** und **c)** den jeweils exakten Grundzustand und diskutieren Sie mögliche Unterschiede zur (Anti)Symmetrisierung des Grundzustands aus **a)**.