Aufgabenblatt 5

15 Zeitabhängige Störungstheorie: β^--Zerfall

Ein K^{18+} Atom zerfällt durch β^--Zerfall zum Zeitpunkt $t = 0$ spontan zu einem Ca^{19+} Atom. Vor dem Zerfall befand sich das Elektron im 1s Zustand, $|nlm\rangle = |100\rangle$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit (in Prozent), dass es sich nach dem Zerfall weiterhin im 1s Zustand (des neuen Kerns) befindet.

1 Kreuz

16 Drei Elektronen ohne Spin

Wir betrachten drei Elektronen ohne Spin, sodass der Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2 \otimes L^2 \otimes L^2$ durch ein Tensorprodukt aus dem Einteilchen-Hilbertraum L^2 (quadratintegrable Funktionen) geschrieben werden kann. Gegeben seien außerdem drei Ein-Elektron-Zustände $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle \in L^2$, sodass z.B. $\langle \boldsymbol{r}|\varphi_1\rangle = \varphi_1(\boldsymbol{r})$ eine qaudratintegrable Funktion ist.

a) Warum ist $|\psi\rangle = |\varphi_1\varphi_2\varphi_3\rangle$ kein gültiger Zustand für drei Elektronen?

b) Wenden Sie den Antisymmetrisierungsoperator (siehe Skript)

$$\mathcal{A} = \frac{1}{N!} \sum_P (-1)^P \, P \tag{1}$$

auf den Zustand $|\psi\rangle$ aus (a) an. Was ergibt sich, wenn zwei der drei Ein-Elektron-Zustände $|\varphi_i\rangle$ identisch sind?

Hinweis: In der Literatur findet man folgende identische Notationen:

$$|\varphi_1\varphi_2\varphi_3\rangle = |\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\rangle = |\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle|\varphi_3\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_3\rangle \tag{2}$$

1 Kreuz

17 Zwei Elektronen mit Spin

Wir betrachten zwei Elektronen mit Spin. Diesmal ist der Hilbertraum $\mathcal{H} = h \otimes h$ das Tensorprodukt des Einteilchen-Hilbertraums $h = L^2 \otimes \mathbb{C}^2$, d.h. mit räumlichem und Spin-Freiheitsgrad.

a) Zeigen Sie, dass der Zustand $|\phi\rangle$ kein gültiger und $|\psi\rangle$ ein gültiger Zustand ist.

$$|\phi\rangle = \frac{1}{2}\big(|\varphi_1\!\uparrow, \varphi_2\!\downarrow\rangle - |\varphi_1\!\downarrow, \varphi_2\!\uparrow\rangle - |\varphi_2\!\uparrow, \varphi_1\!\downarrow\rangle + |\varphi_2\!\downarrow, \varphi_1\!\uparrow\rangle\big) \tag{3}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\big(|\varphi_1\!\uparrow, \varphi_2\!\downarrow\rangle - |\varphi_1\!\downarrow, \varphi_2\!\uparrow\rangle + |\varphi_2\!\uparrow, \varphi_1\!\downarrow\rangle - |\varphi_2\!\downarrow, \varphi_1\!\uparrow\rangle\big) \tag{4}$$

b) Finden Sie $|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle \in \mathcal{H}$, sodass $|\psi\rangle = \mathcal{A}|\chi\rangle$ wobei $|\chi\rangle = (|\chi_1\rangle + |\chi_2\rangle)/\sqrt{2}$

c) Was ergibt sich für den Zwei-Elektronen-Zustand $|\psi\rangle$, wenn die Ein-Elektron-Zustände $|\varphi_1\rangle = |\varphi_2\rangle$ gleich sind? Wie vereinfach sich $|\chi\rangle$ aus der (b) ?

d) Drücken Sie $\langle\psi|V|\psi\rangle$ als Integrale über $\varphi_1(\boldsymbol{r})$ und $\varphi_2(\boldsymbol{r})$ aus. Hier ist V der Coulomb-Operator (Zwei-Teilchen-Operator) mit folgender Wirkung im Orts-Spin-Raum,

$$\langle \boldsymbol{r}_1 s_1, \boldsymbol{r}_2 s_2|V|\boldsymbol{r}_3 s_3, \boldsymbol{r}_4 s_4\rangle = \frac{\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3)\delta(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_4)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}\,\delta_{s_1 s_3}\delta_{s_2 s_4}\,, \qquad s_i = \uparrow, \downarrow\,. \tag{5}$$

Hinweis: Machen Sie sich bewusst, dass die $\mathbb{1}$ in $\mathcal{H}$ wie folgt ausgedrückt werden kann,

$$\mathbb{1} = \sum_{s,s'} \int \mathrm{d}^3 r \int \mathrm{d}^3 r'\, |\boldsymbol{r}s, \boldsymbol{r}'s'\rangle\langle \boldsymbol{r}s, \boldsymbol{r}'s'|\,. \tag{6}$$

(a)+(bc)+(d) = 3 Kreuze