Aufgabenblatt 6

18 Hartree-Fock

a) Begründen Sie, warum das Hartree-Fock Verfahren für *ein* Elektron exakt ist, ab *zwei* Elektronen jedoch nur noch eine Näherung darstellt.

b) Für ein N-Teilchensystem (ohne Spin-Freiheitsgrad) ist die Hartree-Fock Lösung $|\psi\rangle$ (Slaterdeterminante aus Ein-Teilchen Wellenfunktionen $\varphi_i(\boldsymbol{r})$) gefunden worden. Drücken Sie den Erwartungswert der kinetischen Energie des Systems durch die Ein-Teilchen Wellenfunktionen aus.

1 Kreuz

19 Streutheorie

a) Zeigen Sie, dass die Schrödingergleichung eines Streuproblems durch den Ansatz

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} + f(\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \tag{1}$$

im Grenzfall $r \to \infty$ gelöst wird. Für das Streupotential gelte: $rV(r) \to 0$ für $r \to \infty$. Nennen Sie ein Potential, dass diese Bedingung nicht erfüllt.

b) Bestimmen Sie die Streuamplitude $f(\theta)$ für eine Situation reiner s-Streuung, in der ein differentieller Wirkungsquerschnitt von $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = a > 0$ vorliegt.

c) Betrachten Sie die Streuung eines Teilchens mit Masse m an dem *Yukawa-Potential*,

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{c}{r} \cdot \mathrm{e}^{-r/r_0}\ , \quad c, r_0 > 0\ . \tag{2}$$

Berechnen Sie die Streuamplitude $f(\theta)$ und den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$. Verwenden Sie die Bornschen Näherung in erster Ordnung.

(a)+(b)+(c) = 3 Kreuze

20 Relativistische Quantenmechanik

a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Geschwindigkeit eines einzelnen Elektrons, dass an einen Kern mit Ladungszahl Z gebunden ist. Für welches Z wird etwa 10% der Lichtgeschwindigkeit erreicht? Für welches Z wird Überlichtgeschwindigkeit erreicht? Ist nicht-relativistische Quantenmechanik für das Wasserstoffatom gerechtfertigt?

b) Berechnen und erklären Sie, wie aus dem relativistischen Energiesatz $\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 c^2$ und dem Korrespondenzprinzip $p^\mu \to \mathrm{i}\hbar\partial^\mu$ die Klein-Gordon-Gleichung

$$\hbar^2 \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(\{x^\mu\}) = m^2 c^2 \, \psi(\{x^\mu\}) \tag{3}$$

hergeleitet werden kann. Hierbei ist

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

und

$$\partial^\mu \equiv \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{5}$$

1 Kreuz