1. Test (27.11.20)

Aufgabe 1

Ein beliebiger Dichteoperator eines Spin-1/2 Teilchens sei gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}\right) \ , \tag{1}$$

mit $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)^T \in \mathbb{R}^3$, $|\boldsymbol{n}| \leq 1$, und dem Vektor der Pauli-Matrizen $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$.

a) Zeigen Sie, dass ρ hermitesch und die Spur auf 1 normiert ist.

b) Welche Bedingung muss $\boldsymbol{n}$ erfüllen, damit ρ ein reiner Zustand ist?

c) Gegeben sei ein Zustand $|\psi\rangle = (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$. Finden Sie das $\boldsymbol{n}$, dass diesen Zustand beschreibt. Hier sei $|\uparrow\rangle = (1,0)^T$ und $|\downarrow\rangle = (0,1)^T$.

d) Zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung von ρ durch folgende Gleichung gegeben ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{n}(t)\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\boldsymbol{n}(t)\boldsymbol{\sigma}, H] \ , \tag{2}$$

wobei H ein Hamiltonoperator ist.

Hinweis: Zum Lösen der Aufgaben müssen Sie keine Matrix-Matrix Multiplikation explizit ausrechnen. Sparen Sie sich Zeit und Schreibarbeit!

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1} + \mathrm{i}\sum_k \varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{4}$$

Aufgabe 2

Wir betrachten den Drehoperator D_ϕ mit folgender Wirkung in der (x, y)-Ebene

$$D_\phi X D_\phi^\dagger = X\cos\phi + Y\sin\phi \tag{5}$$
$$D_\phi Y D_\phi^\dagger = -X\sin\phi + Y\cos\phi \tag{6}$$
$$D_\phi P_x D_\phi^\dagger = P_x\cos\phi + P_y\sin\phi \tag{7}$$
$$D_\phi P_y D_\phi^\dagger = -P_x\sin\phi + P_y\cos\phi \tag{8}$$

und auf eine Funktion $\psi(x, y) = \langle x, y|\psi\rangle$:

$$\langle x, y|D_\phi|\psi\rangle = \psi(x\cos\phi - y\sin\phi, x\sin\phi + y\cos\phi) \tag{9}$$

a) Zeigen Sie, dass die zeitabhängige Schrödingergleichung eines freien Teilchens in der (x, y)-Ebene invariant unter einer Transformation mit D_ϕ ist.

b) Gegeben sei der Hamiltonian

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2m} + \frac{1}{4}m\omega^2 X^2 + \frac{1}{4}m\omega^2 Y^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 XY\ , \quad \boldsymbol{P} = (P_x, P_y)^T \tag{10}$$

Berechnen Sie den Grundzustand von H indem Sie eine geeignete Hin- **und** Rücktransformation durchführen. Kennzeichnen Sie die transformierten Größen mit einer Tilde, $\tilde{H}$, $\tilde{\psi}$.

Hinweis: Für dieses Beispiel können Sie die Normierung der Zustände vernachlässigen.