2. Test (29.01.21)

Aufgabe 1: Vielteilchen (2 Punkte)

a) Sind diese zwei Zustände gültige Elektronen-Zustände? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\varphi_1\varphi_2\rangle - |\varphi_2\varphi_1\rangle\big)\ |\uparrow\uparrow\rangle \qquad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\ |\varphi\varphi\rangle\ \big(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\big) \tag{1}$$

b) Drücken Sie die Erwartungswerte $\langle\psi_1|V|\psi_1\rangle$ und $\langle\psi_2|V|\psi_2\rangle$ durch die Ein-Elektronzustände $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ aus. Für den Coulomb-Operator V gilt:

$$\langle \boldsymbol{r}_1 s_1, \boldsymbol{r}_2 s_2|V|\boldsymbol{r}_3 s_3, \boldsymbol{r}_4 s_4\rangle = \frac{\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3)\delta(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_4)}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}\ \delta_{s_1s_3}\delta_{s_2s_4}\ , \qquad s_i = \uparrow,\downarrow\ . \tag{2}$$

a=1P, b=1P

Aufgabe 2: Näherungsverfahren (5 Punkte)

a) Ein Spin 1/2 Teilchen befinde sich in einem Eigenzustand $|\uparrow\rangle$ des Hamiltonoperators $H = -\gamma B\sigma_z$ (Magnetfeld in z-Richtung). Als Störung wird ein Magnetfeld mit gleicher Stärke in x-Richtung dazugeschaltet.

   i) Die Störung wird plötzlich eingeschaltet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Teilchen unmittelbar nach dem Einschalten im Zustand $|\downarrow\rangle$?

   ii) Die Störung wird als Puls ein- und wieder ausgeschaltet, modelliert durch die zeitabhängige Funktion e^{-t^2/τ^2}. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Teilchen für $t=\infty$ im Zustand $|\downarrow\rangle$? Beschränken Sie sich auf Effekte erster Ordnung, denn es gelte $\tau \ll (\gamma B)^{-1}$.

b) Die ungestörten Eigenzustände eines Hamiltonians seien durch

$$H|\phi_{nm}\rangle = E_n|\phi_{nm}\rangle\ , \qquad n\in\mathbb{N}\ , \quad m=1,2 \tag{3}$$

gegeben, sodass jeder Zustand zweifach entartet ist. Nun kommt eine Störung $H \to H+V$ hinzu. Berechnen Sie die Energieaufspaltung von E_n für ein fixes n. Beschränken Sie sich auf den Unterraum, der durch die zu n gehörigen Eigenvektoren aufgespannt wird.

ai=1P, aii=2P, b=2P

Aufgabe 3: Streuung (3 Punkte)

a) Schreiben Sie den Partialwellenansatz für die Streuamplitude $f(\theta)$ bis einschließlich s- und p-Wellenstreung explizit auf.
Verwenden Sie die Legendre-Polynome $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$.

b) Berechnen Sie die Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ für den Ansatz

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{kr}} + f(\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \tag{4}$$

Beschränken Sie sich dabei auf den Grenzfall $r \to \infty$, d.h. vernachlässigen Sie Terme die schneller als $1/r$ abfallen. Verwenden Sie den Gradienten in Kugelkoordinaten, $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$, wobei wir hier den φ-Anteil weggelassen.

a=1P, b=2P