

# 1. PLENUM QT2 (2022-2023) <sup>WS</sup>

a)  $\hat{H}(t) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(t)$        $\vec{\mu} = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \vec{S} = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$

$$\hat{H}(t) = + \frac{\mu_B g}{2} \left[ B_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + B_r \begin{pmatrix} 0 & \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\hat{H}_0}$        $\underbrace{\hspace{15em}}_{\hat{V}(t)}$

in der Basis  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

$$\hat{H}_0 = \frac{\mu_B g B_z}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \hat{V}(t) = \frac{\mu_B g B_r}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_0$        $\Gamma$

(1)

b)  $P_{\uparrow}(t) = P_{\uparrow\leftrightarrow\downarrow}(t)$  in 1. Ordnung Störungstheorie  
(in diesem Fall, das  $|\psi(t=0)\rangle = |\downarrow\rangle$ )

$$P_{\uparrow}^{(1)}(t) = |a_{\uparrow\downarrow}^{(1)}(t)|^2 \text{ mit } a_{\uparrow\downarrow}^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' e^{i\omega_{\uparrow\downarrow} t'} \hat{V}_{\uparrow\downarrow}(t')$$

HIER:  $a_{\uparrow\downarrow}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' e^{i\omega_{\uparrow\downarrow} t'} \langle \uparrow | \hat{V}(t') | \downarrow \rangle =$

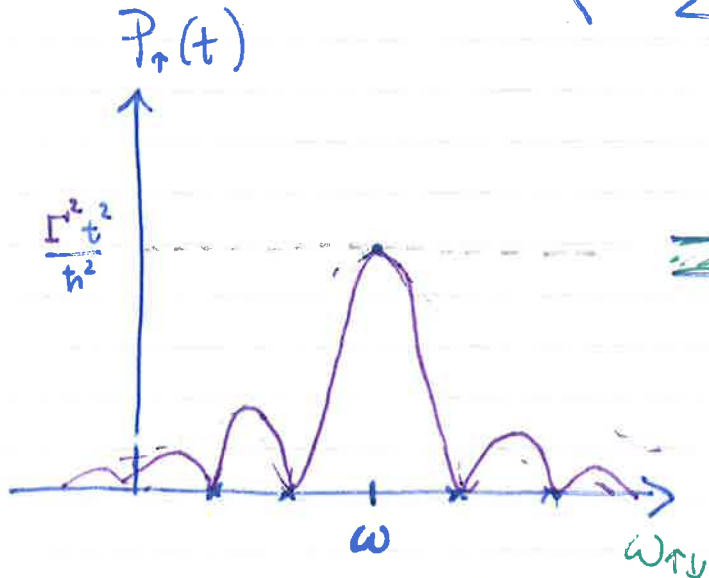
$$= \frac{\Gamma}{i\hbar} \int_0^t dt' e^{i(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)t'} = \frac{\Gamma}{i\hbar} \left[ \frac{e^{i(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)t} - 1}{i(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)} \right]$$

mit  $\omega_{\uparrow\downarrow} = \frac{\epsilon_{\uparrow}^0 - \epsilon_{\downarrow}^0}{\hbar} = \frac{2\Delta_0}{\hbar}$

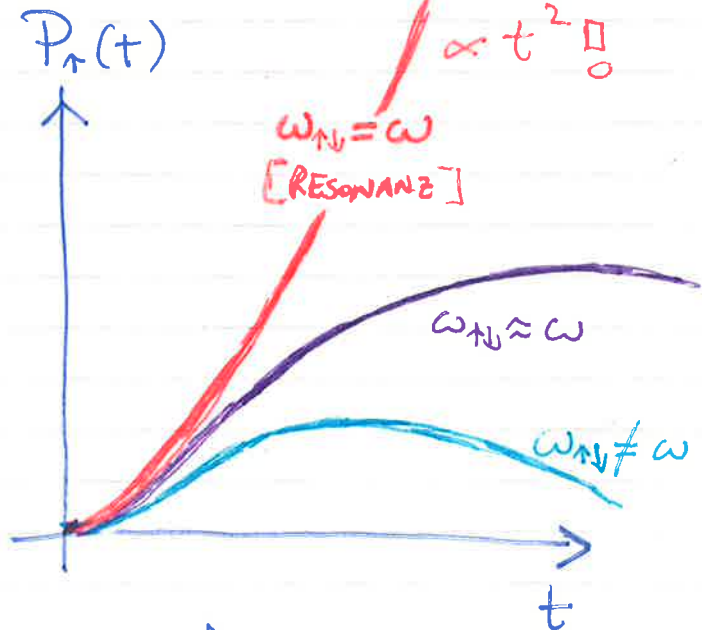
(2)

$$P_{\uparrow}^{(1)}(t) = \frac{\Gamma^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2\left[\frac{(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)t}{2}\right]}{\left(\frac{\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega}{2}\right)^2}$$

c.f. periodische Störungen  
in der VO



bei fixierter  $t$  (wie in der VO)



bei fixierte  $\omega_{\uparrow\downarrow}$

3

c) Berechnung des EXAKTEN AUSDRUCKES von  $P_{\uparrow}(t)$

Im W.W.-Bild:  $P_{\uparrow}(t) = |\langle \uparrow | \psi_{\text{I}}(t) \rangle|^2$

wo  $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_{\text{I}}(t)\rangle = \hat{V}_{\text{I}}(t) |\psi_{\text{I}}(t)\rangle$

und  $|\psi_{\text{I}}(t)\rangle = \sum_{\mu} c_{\mu}(t) |\psi_{\mu}^{\circ}\rangle$

Eigenzustände von  $\hat{H}_0$

$\Rightarrow$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \left[ \sum_{\mu} c_{\mu}(t) |\psi_{\mu}^{\circ}\rangle \right] = \hat{V}_{\text{I}}(t) \left[ \sum_{\mu} c_{\mu}(t) |\psi_{\mu}^{\circ}\rangle \right]$$

4

Wenn man beide Seiten der Gl. mal  $\langle \psi_u^0 |$  multipliziert, bekommt man:

$$i\hbar \dot{c}_n(t) = \sum_u \langle \psi_u^0 | \hat{V}_I(t) | \psi_u^0 \rangle c_u(t)$$

$$= \sum_m e^{i\omega_{nm}t} V_{nm}(t) c_m(t)$$

HIER:

$$\begin{cases} i\hbar \dot{c}_\uparrow(t) = e^{i\omega_{\uparrow\downarrow}t} \langle \uparrow | \hat{V}(t) | \downarrow \rangle c_\downarrow(t) \\ i\hbar \dot{c}_\downarrow(t) = e^{i\omega_{\downarrow\uparrow}t} \langle \downarrow | \hat{V}(t) | \uparrow \rangle c_\uparrow(t) \end{cases}$$

mit  $c_\uparrow(0) = 0$ ;  $c_\downarrow(0) = 1$  (5)

und, da  $\langle \uparrow | \hat{V}(t) | \downarrow \rangle = \Gamma e^{-i\omega t}$  und  $\omega_{\downarrow\uparrow} = -\omega_{\uparrow\downarrow}$

$$\Rightarrow \begin{cases} i\hbar \dot{c}_\uparrow(t) = \Gamma e^{i(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)t} c_\downarrow(t) \\ i\hbar \dot{c}_\downarrow(t) = \Gamma e^{-i(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)t} c_\uparrow(t) \end{cases}$$

• Exakte Lösung:

$$i\hbar \ddot{c}_\uparrow(t) = \Gamma [i(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)] e^{i(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)t} c_\downarrow(t) + \Gamma e^{i(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)t} \dot{c}_\downarrow(t)$$

mit  $\begin{cases} \dot{c}_\downarrow(t) = \frac{\Gamma}{i\hbar} e^{-i(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)t} c_\uparrow(t) \\ \Gamma e^{i(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)t} c_\downarrow(t) = i\hbar \dot{c}_\uparrow(t) \end{cases}$

(6)

$$\Rightarrow i\hbar \ddot{c}_\uparrow(t) = i\hbar [i(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)] \dot{c}_\uparrow(t) + \frac{\Gamma^2}{i\hbar} c_\uparrow(t)$$

zu lösen (exakt!)

$$\begin{cases} \ddot{c}_\uparrow(t) - i(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega) \dot{c}_\uparrow(t) + \frac{\Gamma^2}{\hbar^2} c_\uparrow(t) = 0 \\ c_\uparrow(0) = 0 \\ \dot{c}_\uparrow(0) = \frac{\Gamma}{i\hbar} c_\downarrow(0) = \frac{\Gamma}{i\hbar} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma = 0 \rightarrow \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0 \\ \text{mit } d=1; \beta = -i(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega); \gamma = \frac{\Gamma^2}{\hbar^2} \end{cases} \rightarrow \text{zu lösen}$$

(7)

$$\Delta = \sqrt{\beta^2 - 4d\gamma} = \sqrt{-(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)^2 - 4\frac{\Gamma^2}{\hbar^2}} = i\sqrt{(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)^2 + 4\frac{\Gamma^2}{\hbar^2}} = i\Omega$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2d} \pm i\frac{\Omega}{2d}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\beta/2d t} \left[ A \cos\left(\frac{\Omega t}{2d}\right) + B \sin\left(\frac{\Omega t}{2d}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_\uparrow(t) = e^{-\frac{i(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)t}{2}} \left[ A \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] \\ c_\uparrow(0) = 0 \rightarrow \boxed{A=0} \\ \dot{c}_\uparrow(0) = \frac{\Gamma}{i\hbar} \rightarrow \frac{\Omega}{2} B = \frac{\Gamma}{i\hbar} \rightarrow \boxed{B = \frac{2\Gamma}{i\hbar\Omega}} \end{cases}$$

(8)

$$c_{\uparrow}(t) = \frac{e^{-i(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)t}}{i} \frac{2\Gamma}{\hbar\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$

$$P_{\uparrow}(t) = \langle \uparrow | \Psi_{\pm}(t) \rangle = |c_{\uparrow}(t)|^2$$

$$= \frac{\Gamma^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right)}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2}$$

mit  $\Omega = \sqrt{(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)^2 + \frac{4\Gamma^2}{\hbar^2}}$

→ Exakte Lösung! □

9

⇒ Mögliche Vergleiche

$$P_{\uparrow}^{(1)}(t) = \frac{\Gamma^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2\left[\frac{(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)t}{2}\right]}{\left(\frac{\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega}{2}\right)^2} \text{ vs. } P_{\uparrow}^{\text{EXAKT}}(t) = \frac{\Gamma^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2\left[\frac{\Omega t}{2}\right]}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2}$$

⇒ Dieselbe Funktion aber mit unterschiedlichen Argumenten!

$$\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega$$

vs.

$$\Omega = \sqrt{(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)^2 + \frac{4\Gamma^2}{\hbar^2}}$$

Bei der Resonanz:  
[ $\omega_{\uparrow\downarrow} = \omega$ ]



Bei der Resonanz:  
 $\frac{2\Gamma}{\hbar} > \emptyset$



10

mathematisch ...

Man kann einfach sehen, dass wenn  $\Gamma \ll |\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega|$

$$\Omega = \sqrt{(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)^2 + \frac{4\Gamma^2}{\hbar^2}} = |\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega| \sqrt{1 + \frac{4\Gamma^2}{\hbar^2(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)^2}}$$

$$= |\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega| \left[ 1 + o\left(\frac{\Gamma^2}{(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)^2}\right) \right]$$

$$P_1(t) \approx \frac{\Gamma^2}{\hbar} \frac{\sin^2\left[\frac{(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)t}{2}\right]}{\left(\frac{\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega}{2}\right)^2} \left[ 1 + o\left(\frac{\Gamma^2}{(\omega_{\uparrow\downarrow} - \omega)^2}\right) \right]$$

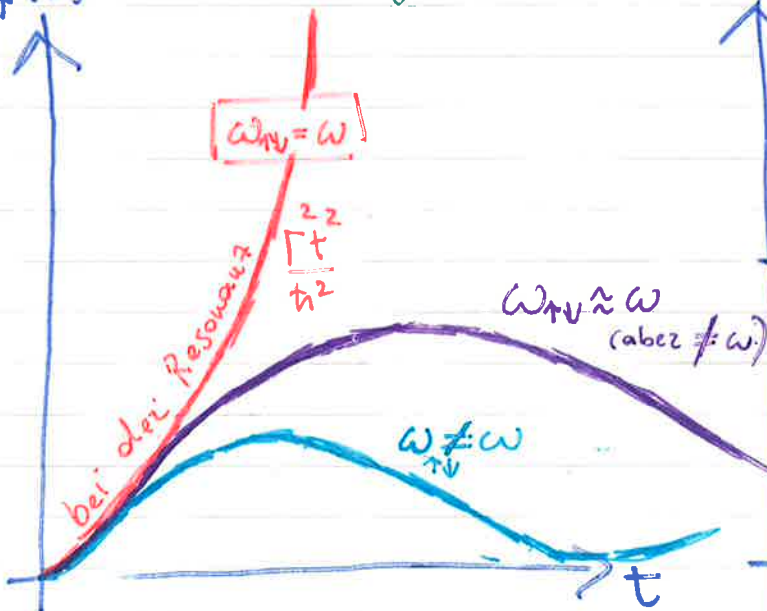
→ 1. Ordnung Ausdruck

(11)

... und physikalisch

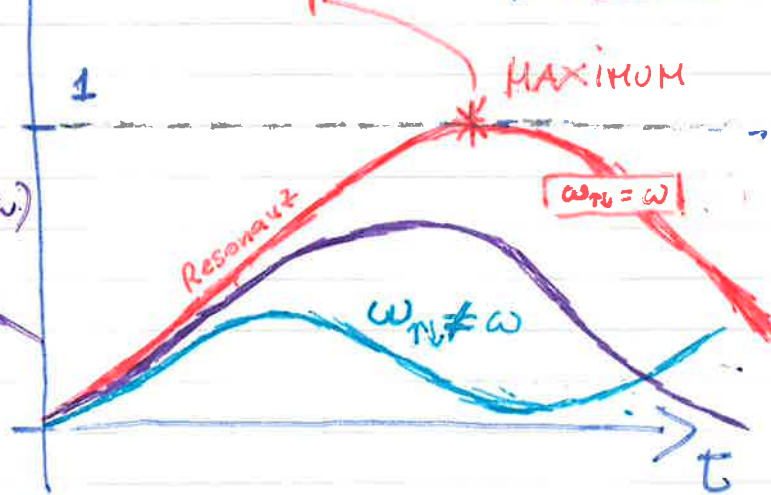
Ganz konkret:

$P_{\uparrow}^{(1)}(t)$  • 1. Ordnung St.



$P_{\uparrow}^{\text{Exakt}}(t)$  • Exakte Lösung

für  $\omega_{\uparrow\downarrow} = \omega \Rightarrow \Omega = \frac{2\Gamma}{\hbar} \parallel P_{\uparrow}^{\text{MAX}} = 1 \parallel$



⇒ Rabi Oszillationen

(12)