

Lösung zum 2. Plenum, QT 2, WS 2019/2020

2. Streutheorie - Born'sche Näherung

Mathematische Vorbereitungen:

(i) $F_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x-z)^2}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Mit $\xi = x - \operatorname{Re} z$:

$$F_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-(\xi - i \operatorname{Im} z)^2} =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^R d\xi e^{-\xi^2} + \int_{-R}^R d\xi e^{-\xi^2} - \int_{-R}^R d\xi e^{-\xi^2} - \int_{-R}^R d\xi e^{-\xi^2} \right) =$$

$$= \int_{-R}^R d\xi e^{-\xi^2} - \int_0^R d\xi e^{-\xi^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 + \operatorname{erf}(-\operatorname{Re} z) + i \operatorname{erfi}(\operatorname{Im} z))$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 + \operatorname{erf}(-\operatorname{Re} z)) - \int_0^R d\xi e^{-\xi^2} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfi}(\operatorname{Im} z), \quad \xi = -iz$$

(ii) $F_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x-z)^2}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Dann gilt: $\frac{dF_2(z)}{dz} =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dz} e^{-(x-z)^2} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dx} e^{-(x-z)^2} = -e^{-(x-z)^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$2(x-z)e^{-(x-z)^2} = -\frac{d}{dx} e^{-(x-z)^2} \Rightarrow F_2(z) = F_2(0) = \sqrt{\pi}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(a) Wellenfunktion in 1. Born'scher Näherung (nichtnormiert)

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{u}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'}$$

ebene Welle Wellenfunktionskorrektur

Anwendbarkeitskriterium dabei:

$$\frac{u}{2\pi\hbar^2} \left| \int d^3r' \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} \right| \ll \left| e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right| = 1, \forall \vec{r}$$

Für rotationssymmetrisches Potential $V(\vec{r}) = V(r)$ mit betragsmäßigem Maximum an der Stelle $\vec{r} = \vec{0}$ betrachtet man typischerweise nur die Stelle $\vec{r} = \vec{0}$, weil man dort die größten Korrekturen erwartet.

$$\frac{u}{2\pi\hbar^2} \left| \int dr^3 e^{i(\vec{k}r + \vec{k}\cdot\vec{r})} \frac{V(r)}{r} \right| \ll 1$$

Man berechnet: $\frac{u}{2\pi\hbar^2} \left| 2\pi \int_0^\infty dr r e^{ikr} V(r) \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{ikr\cos\theta} \right|$

$$= \frac{u}{\hbar^2 k} \left| \int_0^\infty dr V(r) (e^{2ikr} - 1) \right| = (*)$$

$$\int_{-1}^1 d\xi e^{ikr\xi} = \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr}$$

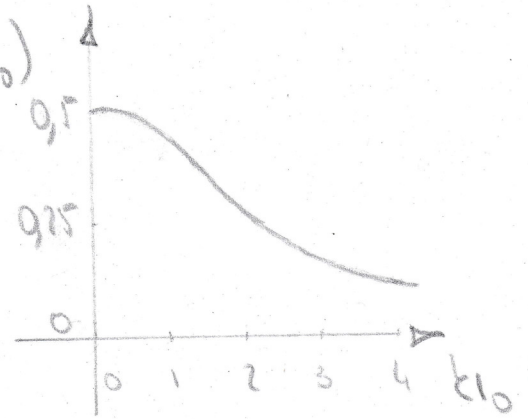
$\xi = \cos\theta$

Für $V(r) = V_0 e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}$: $e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} (e^{2ikr} - 1) =$

$$= |g = \frac{r}{r_0}| = e^{-(kr_0)^2} e^{-(g - ikr_0)^2} - e^{-g^2} \Rightarrow (*) = \frac{u|V_0|r_0^2}{\hbar^2} \frac{1}{\frac{|e^{-(kr_0)^2} - 1|}{k_0} - k_0} = \frac{|V_0|}{\hbar^2(r_0)^2/u} \frac{k_0}{k_0} \quad \textcircled{2}$$

mit der ersten Dawson'schen Funktion $D_+(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-z^2} \operatorname{erfi}(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$,
 folgt: $\frac{|V_0|}{E_{kin}(k=\frac{1}{2})} \left[\frac{\pi}{4} (1 - e^{-(k_0)^2})^2 + D_+(k_0)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \ll 1$,

wobei Resultat (i) für $F_1(z)$ und $E_{kin}(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ verwendet wurde. Dargestellt ist $f(k_0) = \left[\frac{\pi}{4} (1 - e^{-(k_0)^2})^2 + D_+(k_0)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ skizziert.



(b) \Rightarrow Streuamplitude: $f(\theta, \phi) |_{\theta=0} =$

$$= -\frac{4}{2\pi\hbar^2} \mathcal{F}(V)(\vec{q}) = -\frac{4}{2\pi\hbar^2} \int d^3\vec{r} V(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\vec{r}} = (*)$$

Für rotationssymmetrisches Potential $V(\vec{r}) = V(r)$:

$$(*) = -\frac{4}{i\hbar^2 q} \int_0^\infty dr r V(r) (e^{iqr} - e^{-iqr}) = \frac{4}{i\hbar^2 q} \mathcal{F}(V(\|\cdot\|))(q)$$

$$\left[-\int_0^\infty dr r V(r) e^{iqr} + \int_0^\infty dr r V(r) e^{-iqr} \right] = \frac{4}{i\hbar^2 q} \mathcal{F}(V(\|\cdot\|))(q)$$

$\int_{r=0}^{\infty} dr (r) V(r) e^{-iq(r)} = \int_0^\infty dr r V(r) e^{-iqr}$ konvergiert für $V(r) = V_0 e^{-(r/r_0)^2}$

mit $q = k_0$: $(*) = \frac{4V_0}{i\hbar^2 q_0} \int_0^\infty dr r e^{-r^2} e^{-iq_0 r}$, und daher:

$$e^{-\frac{r^2}{r_0^2}} \left(\frac{1}{q + i\frac{q_0}{2}} e^{-(q + i\frac{q_0}{2})r} - i\frac{q_0}{2} e^{-(q + i\frac{q_0}{2})r} \right)$$

$$(*) = \frac{4\pi \mu_0^3 V_0}{i\hbar^2} \frac{e^{-\frac{(p_0)^2}{4}}}{p_0} \left[-2 \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{d}{dq} e^{-(q + i\frac{p_0}{2})^2} - \frac{i p_0}{2} \underbrace{\Gamma_2(-i\frac{p_0}{2})}_{\sqrt{\pi} \Gamma_2(i)} \right] =$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi} \mu_0^3 V_0}{2\hbar^2} e^{-\frac{(p_0)^2}{4}} = \left| \vec{q} = \vec{k} - \vec{k}, \varphi = 2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| =$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi} \mu_0^3 V_0}{2\hbar^2} e^{-(k_0)^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} V_0 \frac{V_0}{E_{kin}(k=\frac{1}{2})} e^{-(k_0)^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

→ Differentielles Streuquerschnitt: $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi) \Big|_{1. B. D.} = \left| f(\theta, \phi) \Big|_{1. B. D.} \right|^2$

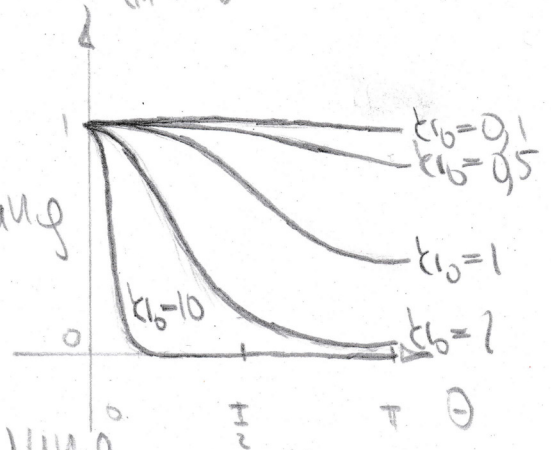
$$= \frac{\pi}{16} V_0^2 \left(\frac{|V_0|}{E_{kin}(k=\frac{1}{2})} \right)^2 e^{-2(k_0)^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Obenstehend ist der normierte
differentielle Streuquerschnitt

für verschiedene Werte von k_0 skizziert.

Signifikante Anisotropie (Unterdrückung
großer Streuwinkel) ab $k_0 \gtrsim 1$.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} / \frac{\pi}{16} V_0^2 \left(\frac{|V_0|}{E_{kin}(k=\frac{1}{2})} \right)^2$$



Physikalischer Grund: Bornsche Näherung

anwendbar, falls (sh. (e)) $\frac{|V_0|}{E_{kin}(k=\frac{1}{2})} \ll 1$. Für $k_0 \gtrsim 1$

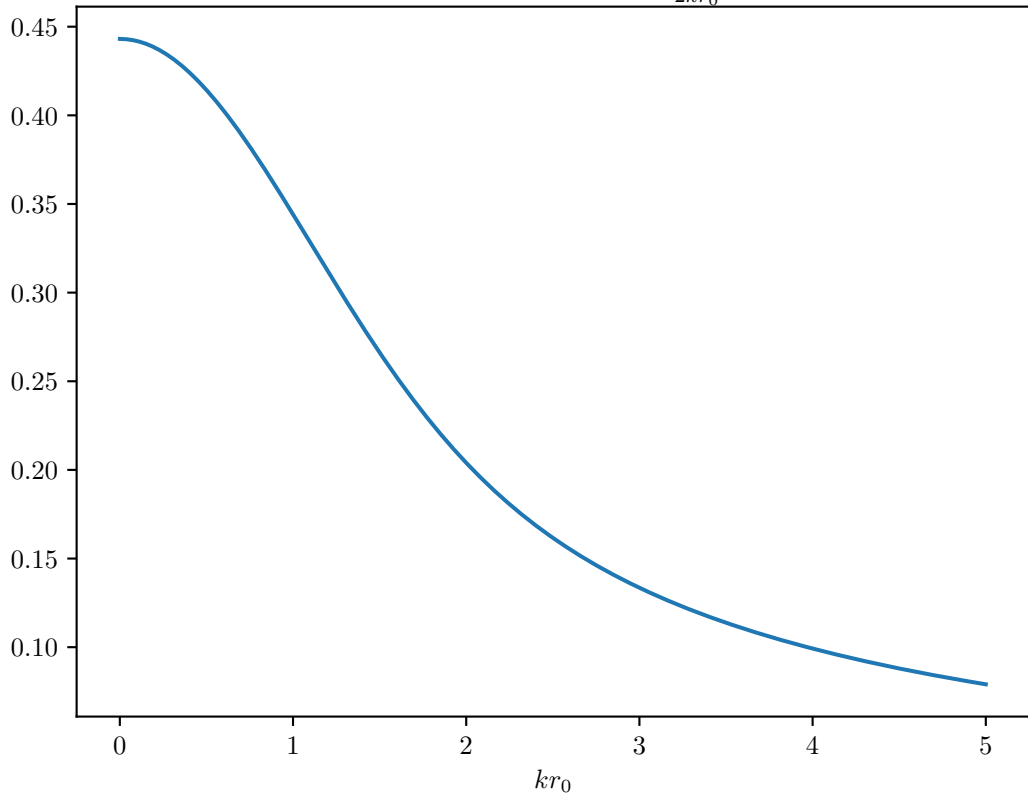
ist die kinetische Energie E_{kin} viel größer als die Potentialstärke,
so dass große Streuwinkel (immer) unwahrscheinlicher
werden.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{I.B.D.}} &= \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Theta, \phi) \Big|_{\text{I.B.D.}} = \frac{\pi v_0^4}{8} \left(\frac{|V_0|}{E_{\text{kin}}(k=\frac{1}{2}v_0)} \right)^2 \\
 &= \frac{\pi v_0^4}{8} \left(\frac{|V_0|}{E_{\text{kin}}(k=\frac{1}{2}v_0)} \right)^2 \frac{1 - e^{-2(k_0)^2}}{(k_0)^4} \\
 &\underbrace{\int_0^\pi d\Theta \sin\Theta e^{-2(k_0)^2 \underbrace{2\sin^2(\frac{\Theta}{2})}_{1-\cos\Theta}}}_{\int_0^\pi d\zeta e^{-(k_0)^2 \zeta} = \frac{1 - e^{-2(k_0)^2}}{(k_0)^1}, \zeta = 1 - \cos\Theta}
 \end{aligned}$$

(b) Für die Entwicklungskoeffizienten $f_l(\delta_\varphi) = \frac{1}{\pi} e^{i l \delta_\varphi} \sin \delta_\varphi$ der Streuamplitude gilt: $f_l \Big|_{\text{I.B.D.}} = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr r^2 V(r) j_l(kr)^2$.
 Für $V(r) = V_0 e^{-(\frac{r}{a})^2}$ werden bei gegebenem k die Partialwellen mit $l \leq k_0$ signifikant gestreut. Wir beschränken uns hier auf die (stets relevante) s-Wellenstreuung ($l=0$):

$$\begin{aligned}
 f_0 \Big|_{\text{I.B.D.}} &= 1/j_0(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{\varphi} = -\frac{2m V_0}{\hbar^2 k^2} \int_0^\infty dr e^{-(\frac{r}{a})^2} \underbrace{\sin^2(kr)}_{\frac{e^{2ikr} - e^{-2ikr}}{4}} = \\
 &= -\frac{1}{k} = \frac{1}{v_0} = \frac{m V_0 a^3}{2\hbar^2} \frac{1}{(k_0)^2} \int_0^\infty d\xi e^{-\xi^2} \underbrace{\left(\frac{e^{2i k_0 \xi} - e^{-2i k_0 \xi}}{4} \right)}_{\frac{1 - e^{-(k_0)^2 \xi^2}}{2\sqrt{\pi} + i(\text{erfi}(k_0 \xi) + \text{erfi}(-k_0 \xi))} = \sqrt{\pi}} = \\
 &= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{V_0}{E_{\text{kin}}(k=\frac{1}{2}v_0)} \frac{1 - e^{-(k_0)^2}}{(k_0)^2} \quad \text{da erfi ungerade Funktion} \\
 \Rightarrow \sigma_0 \Big|_{\text{I.B.D.}} \approx k f_0 \Big|_{\text{I.B.D.}} &= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{V_0}{E_{\text{kin}}(k=\frac{1}{2}v_0)} \frac{1 - e^{-(k_0)^2}}{k_0}
 \end{aligned}$$

Plot zu Aufgabe (b): $\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\left(1 - e^{-k^2 r_0^2}\right)^2 + \left(\operatorname{erfi}(kr_0) e^{-k^2 r_0^2}\right)^2 \right]^{1/2}}{2kr_0}$



Plot zu Aufgabe (b)

