Technische Universität Wien

Dr. F. Krien, PD Dr. J. Tomczak, Prof. A. Toschi, Prof. K. Held

1. Test zur Quantentheorie II

Wintersemester 2022/2023

Freitag, 25.11.2022

Test A **Name:** **Matrikelnr.:**

A1	A2	A3	A4	Σ
12	13 +4*	13	12	50+4*

1. Theoriefragen *3+4+5=12 Punkte*

a) Gegeben sei der zeitbabhängige Hamilton-Operator $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$, mit $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ und $V(t) = -\alpha(t)\,\hat{x}$. Welche der folgenden Relationen gelten dann für den Zeitentwicklung-operator $\hat{U}_I(t)$ im Wechselwirkungsbild:
(i) $\hat{U}_I(t) = \mathrm{e}^{\frac{-i\hat{H}_0 t}{\hbar}}$; (ii) $i\hbar\frac{d}{dt}\hat{U}_I(t) = -\alpha(t)\,\hat{x}\;\hat{U}_I(t)$; (iii) $\hat{U}_I(t{=}0) = \hat{1}$; (iv) $\hat{U}_I(t) = \mathrm{e}^{-\frac{i\hat{V}(t)\,t}{\hbar}}$;
(v) $i\hbar\frac{d}{dt}\hat{U}_I(t) = -\alpha(t)\,\mathrm{e}^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}}\,\hat{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}}\,\hat{U}_I(t)$; (vi) $\hat{U}_I(t) = \mathrm{e}^{\frac{-i\int_0^t dt'\,\hat{V}(t')}{\hbar}}$, wenn $\alpha(t)$ eine beliebige, nicht verschwindende reelle Funktion von t ist?
[ohne Begründung, ±0.5 Punkte pro korrekte/falsche Antwort]

b) Das Elektron eines Tritium-Atoms befindet sich im Grundzustand, d.h. $\psi_{n=1,l=m=0}(r,\theta,\phi) = Y_0^0(\theta,\phi)\,R_{10}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,(\frac{Z}{a_B})^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{Zr}{a_B}}$ (mit $Z=1$ und dem Bohrschen Radius a_B). Wegen eines β-Zerfalls von einem der Neutronen des Kerns wird das Tritium plötzlich in He^+ zerfallen. Mit welcher Näherungsmethode aus der QTII können Sie am besten den Zustand des Elektrons nach dem Zerfall abschätzen? Im Rahmen dieses Verfahrens bestimmen Sie für das System nach dem Zerfall, welche der Übergangsamplituden in den Grundzustand bzw. die 1. angeregten Zustände von He^+ endlich sind/verschwinden.

c) Ein Quantensystem besteht aus Teilsystem 1, gegeben durch ein Dreiniveausystem mit Orthonormalbasis $\{|a\rangle_1, |b\rangle_1, |c\rangle_1\}$, und Teilsystem 2, ein Zweiniveausystem mit Orthonormalbasis $\{|D\rangle_2, |E\rangle_2\}$. Die gemeinsame Wellenfunktion sei

$$|\psi\rangle = \left(|a\rangle_1|D\rangle_2 + i|b\rangle_1|D\rangle_2 - i|c\rangle_1|E\rangle_2\right)/\sqrt{3} \tag{1}$$

Geben Sie die reduzierte Dichtematrix für Teilsystem 1 als Matrix an. Beschreibt diese einen reinen Zustand?

2. Quantenschwigungen im Potentialtopf *2+4+4+4*+3=13+4* Punkte*

Betrachten Sie ein Teilchen in einem eindimensionalen (unendlich hohen) Potentialtopf mit folgendem Hamiltonsoperatpor $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x)$, wobei $\hat{V}(x) = 0$ für $0 < x < L$ und ansonsten $+\infty$. Für $t \le 0$ befinde sich das Teilchen im Grundzustand von $\hat{H}_0$. Für $t \ge 0$ fängt der Boden des Potentialtopfs an, zu schwingen. Der Hamiltonsoperator des gestörte Systems sei dann $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}_S(t)$ mit $\hat{V}_S(t) = A\,(\hat{x} - \frac{L}{2})\,\sin(\omega t)$.

a) Zeigen Sie zuerst, dass $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ die Eigenzustände des ungestörten $\hat{H}_0$ sind und berechnen Sie den expliziten Ausdruck der entsprechenden Eigenwerte ε_n.

b) Betrachten Sie nun den zeitabhängigen $\hat{H}(t)$. Geben Sie in 1.Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die Ausdrücke für die Amplituden $a^{(1)}(t)$ und die Wahrscheinlichkeiten $P^{(1)}(t)$ der möglichen Übergänge vom Grundzustand in einen (beliebigen) angeregten Zustand von $\hat{H}_0$ als Funktion von Überlappsintegralen in der Ortsraumdarstellung und Intergralen in der Zeit an.

c) Lösen Sie explizit die Zeitintegrale in $a^{(1)}(t)$ und $P^{(1)}(t)$ von **b)** im spezifischen Fall eines Übergangs vom Grundzustand in den 1. angeregten Zustand von $\hat{H}_0$. *[Für $P^{(1)}(t)$: vernachlässigen Sie die gemischten Beiträge des Betragsquadrats.]*

d) (*) Berechnen Sie nun die Überlappsintegrale in der Ortsraumdarstellung von **b)** für den spezifischen Übergang in **c)** und bestimmen die vollständigen Ausdrücke von $a^{(1)}(t)$ und $P^{(1)}(t)$. *[Hinweis: $sin(2x) = 2\,sin(x)cos(x)$, $\int sin^3(y)\,dy = \frac{cos^3(y)}{3} - cos(y)$].*

e) *[unabhängig von vorherigen Punkten lösbar]* Verwenden Sie die adiabatische Näherung und geben Sie die Energie $E(\bar{t})$ und den Zustand $\psi(x,\bar{t})$ (Phase braucht nicht berechnet werden) des Systems zum Zeitpunkt $\bar{t} = \frac{\pi}{\omega}$ an. Unter welcher (groben) Bedingung wäre die Anwendung der adiabatischen Näherung korrekt?

3. Partialwellenstreuung *5+4+4=13 Punkte*

Betrachten Sie eine einlaufende ebene Welle der Energie $\hbar^2 k^2/(2m)$, welche an dem Potential

$$V(r) = v_1\delta(r - R_1) + v_2\delta(r - R_2)$$

gestreut wird. Die Konstanten v_i $(i = 1, 2)$ haben die Einheit Energie×Länge, und die Radien R_i $(i = 1, 2)$ sind Längen.

a) Berechnen Sie die s- und p-Wellenbeiträge zur Streuamplitude $f(\theta) = \sum_l (2l + 1)P_l(\cos(\theta) f_l$ in erster Born'scher Näherung.

Für kurzreichweitige Potentiale und niederenergetische Streuung kann die Streuamplitude durch Beiträge mit kleinem l genähert werden.

b) Welche Beziehung muss im vorliegenden Fall zwischen v_1 und v_2 gelten, damit bei kleinen Energien $\hbar^2 k^2/(2m)$ bereits der p-Wellenbeitrag verschwindet? Entwickeln Sie dazu $f_1 = f_p$ bis zur ersten nicht-verschwindenden Ordnung in k.

c) Zeigen Sie, dass –wiederum im Grenzfall kleiner Energien– die s-Streuamplitude des Partialwellenformalismus aus **a)** identisch ist mit der ersten Born'schen Näherung einer gestreuten ebenen Welle im Standardformalismus. Entwickeln Sie dazu die Streuamplituden in nullter Ordnung im Wellenvektor k.

4. Dichtematrix für Spin-Austausch in x-y-Ebene *5+4+3=12 Punkte*

Zwei Quantenpunkte (1 und 2) koppeln mit einem Spin-Austausch $J > 0$ in der x-y-Ebene

$$\hat{H} = J(\hat{S}_1^x \hat{S}_2^x + \hat{S}_1^y \hat{S}_2^y) = 2J(\hat{S}_1^+ \hat{S}_2^- + \hat{S}_1^- \hat{S}_2^+)$$

Wir beschreiben die isolierten Quantenpunkte hier durch einen Spin-1/2 der jeweiligen Elektronen; $S_i^x(S_i^y)$ ist die $x(y)$-Komponente des Spins des $i$ten Quantenpunkts, S_i^+, S_i^- sind die entsprechenden Spin-Leiteroperatoren.

a) Zeigen Sie, dass $\hat{H}|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 = \hat{H}|\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 = 0$, wobei $|\sigma\rangle_i$ den Zustand mit Spin σ in z-Richtung von Quantenpunkt i beschreibt. Berechnen Sie die Eigenvektoren und -werte des Problems.

b) Geben Sie für den Grundzustand die Dichtematrix des Gesamtsystems und die reduzierte Dichtematrix für den 1. Quantenpunkt an.

c) Zeigen Sie, dass die Subadditivität der Entropie, $\mathcal{S}_{1+2} \leq \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$, erfüllt ist.

Viel Erfolg!