Technische Universität Wien

Prof. A. Toschi, Prof. K. Held, Dr. J. Tomczak, Dr. F. Krien

1. Übung zur Quantentheorie II

Wintersemester 2022/2023

<u>TUTORIUM</u>: Freitag, 21.10.2022.

1. Zeitentwicklung in unterschiedlichen Darstellungen *1+2+2+1+2+1=9 Punkte*

a) Betrachten Sie den harmonischen Oszillator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$, der sich bei $t = 0$ im Zustand $|\Psi(t=0)\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$ befindet, wobei $\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})|n\rangle$. Geben Sie $|\Psi(t)\rangle$ im Schrödinger-Bild an. Zeigen Sie dass $\langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle = 1$ für alle $t > 0$, vorausgesetzt dies ist erfüllt bei $t = 0$ (die Zeitentwicklung erhält die Norm).

b) Nehmen Sie konkret $|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ an. Berechnen Sie im Schrödinger-Bild die zeitabhängigen Erwartungswerte $\langle\Psi(t)|\hat{x}|\Psi(t)\rangle$ und $\langle\Psi(t)|\hat{p}|\Psi(t)\rangle$.

c) Berechnen Sie die explizite Zeitabhängigkeit der Leiteroperatoren $\hat{a}_H(t), \hat{a}^\dagger_H(t)$ im Heisenberg-Bild, wobei $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ und $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. Benutzen Sie dafür $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \frac{1}{1!}[\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + ...$ für beliebige Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$.

d) Geben Sie die expliziten Ausdrücke für $\hat{x}_H(t), \hat{p}_H(t)$ an und vergleichen Sie diese mit der Lösung der Bewegungsgleichung des klassischen harmonischen Oszillators, mit Anfangsbedingungen $x_{\mathrm{kl}}(t=0) = x^0_{\mathrm{kl}}, p_{\mathrm{kl}}(t=0) = p^0_{\mathrm{kl}}$. Berechnen Sie dann im Heisenberg-Bild die Erwartungswerte $\langle\Psi_H|\hat{x}_H(t)|\Psi_H\rangle$ und $\langle\Psi_H|\hat{p}_H(t)|\Psi_H\rangle$ mit dem selben Ausgangszustand $|\Psi(t=0)\rangle$ aus 1b). Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus dem Schrödinger-Bild.

e) Betrachten Sie von nun an den Hamiltonian $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$, wobei nur $\hat{V}(t)$ explizit von der Zeit abhängt. Der Zeitentwicklungsoperator des Wechselwirkungsbildes erfüllt die Integralgleichung $\hat{U}_I(t) = \hat{1} + \frac{1}{\imath\hbar}\int_0^t \hat{V}_I(t')\hat{U}_I(t')$, geben Sie eine iterative Lösung dafür an. Zeigen Sie damit ganz allgemein: $\hat{U}_I(t) = \hat{T}\exp(-\frac{\imath}{\hbar}\int_0^t dt'\hat{V}_I(t'))$, wobei $\hat{T}$ der Dyson'sche Zeitordnungsoperator ist mit der Eigenschaft $\hat{T}(\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)) = \hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)$ für $t_1 > t_2$ und $\hat{T}(\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)) = \hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1)$ für $t_2 > t_1$. Wieso ist i.A. $\hat{T}$ notwendig um $\hat{U}_I(t)$ durch eine Exponentialfunktion auszudrücken?

f) Unter welcher spezifischen Bedingung kann der Zeitordnungsoperator weggelassen werden, d.h. $\hat{U}_I(t) = \exp(-\frac{\imath}{\hbar}\int_0^t dt'\hat{V}_I(t'))$? Nehmen Sie nun an dass die Störung $\hat{V}(t) = \hat{V}$ nicht von der Zeit abhängt. Unter welcher Bedingung hängt auch $\hat{V}_I(t)$ nicht von der Zeit ab? Geben Sie für diesen ganz speziellen Fall auch $\hat{U}_I(t)$ an und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Zeitentwicklungsoperator des Schrödinger-Bildes für einen zeitunabhängigen Hamiltonian $\hat{H}(t) = \hat{H}$.

2. Zeitabhängige Störungstheorie *1+3+2=6 Punkte*

a) Betrachten Sie den zeitabhängigen harmonischen Oszillator $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2(t)\hat{x}^2$, wobei $\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega\,\theta(t)$, d.h. zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Frequenz des Oszillators von ω_0 auf $\omega_0 + \Delta\omega$ geändert. Geben Sie eine geeignete Störung $\hat{V}(t)$ an, so dass $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$, wobei $\hat{H}_0$ nicht explizit von der Zeit abhängt.

b) Berechnen Sie in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die Übergangsamplitude $a_{fi}^{(1)}$ vom Grundzustand $|\Psi_i\rangle = |0\rangle$ in einen angeregten Zustand $|\Psi_f\rangle = |n\rangle$. Für welche $n \neq 0$ ist ein solcher Übergang möglich? Geben Sie auch die entsprechende Übergangswahrscheinlichkeit und die Übergangsrate an.

c) Unter welcher Bedingung ist Störungstheorie erster Ordnung auf dieses Problem anwendbar? Wie lange, d.h., für welche $t > 0$ bleibt Störungstheorie erster Ordnung anwendbar?