Technische Universität Wien

Prof. A. Toschi, Prof. K. Held, Dr. J. Tomczak, Dr. F. Krien

2. Übung zur Quantentheorie II

Wintersemester 2022/2023

<u>TUTORIUM</u>: Freitag, 4.11.2022.

3. Adiabatisches Theorem und geometrische Phase *1+3+1+3=8 Punkte*

Betrachten Sie einen zeitabhängigen Hamiltonian $H(t)$ welcher nur über einen Satz $\vec{R}$ von Variablen von der Zeit abhängt, d.h. $\frac{dH(t)}{dt} = (\nabla_{\vec{R}} H)\frac{d\vec{R}(t)}{dt}$. Die Eigenzustände $|\Psi_m(t)\rangle$ erfüllen die *instantane* Schrödinger-Gleichung $H(t)|\Psi_m(t)\rangle = E_m(t)|\Psi_m(t)\rangle$ zum Zeitpunkt t und sind orthonormiert, $\langle\Psi_n(t)|\Psi_m(t)\rangle = \delta_{nm}$. (Hinweis: Instantan bedeutet hier, dass die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung zu jedem Zeitpunkt t separat gelöst wird. Wie Sie im Folgenden sehen werden, erfüllen die Lösungen $|\Psi_m(t)\rangle$ i.A. *nicht* die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung.)

a) Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung $\imath\hbar\partial_t|\Psi(t)\rangle = H(t)|\Psi(t)\rangle$ bestimmt die Zeitevolution eines allgemeinen Zustands $|\Psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t)|\Psi_n(t)\rangle$. Zeigen Sie, dass für die Koeffizienten gilt: $\frac{da_m(t)}{dt} + \sum_n \langle\Psi_m(t)|\nabla_{\vec{R}}|\Psi_n(t)\rangle\frac{d\vec{R}(t)}{dt}a_n(t) = \frac{1}{\imath\hbar}E_m(t)a_m(t)$.

b) Nehmen Sie an, dass $\langle\Psi_m(t)|\nabla_{\vec{R}}|\Psi_n(t)\rangle$ für $n \neq m$ vernachlässigbar klein ist (adiabatische Näherung). Was bedeutet dies anschaulich? Zeigen Sie unter dieser Annahme, dass $a_m(t) = e^{\imath\theta_m(t)}e^{\imath\gamma_m(t)}a_m(0)$, mit der *dynamischen* Phase $\theta_m(t) = \frac{-1}{\hbar}\int_0^t E_m(t')dt'$ und der *geometrischen* Phase (auch 'Berry phase' genannt) $\gamma_m(t) = \imath\int_0^t \langle\Psi_m(t')|\nabla_{\vec{R}}|\Psi_m(t')\rangle\frac{d\vec{R}(t')}{dt'}dt' = \imath\int_C \langle\Psi_m(\vec{R})|\nabla_{\vec{R}}|\Psi_m(\vec{R})\rangle d\vec{R}$, wobei C die Kurve im Parameter-Raum ist welche $\vec{R}(t')$ im Zeitintervall von $t' = 0$ bis $t' = t$ durchläuft.

c) Nehmen Sie jetzt an, dass $|\Psi(t)\rangle$ zur Zeit $t = 0$ der (nicht entartete) Grundzustand $|\Psi_0(t = 0)\rangle$ ist. Zeigen Sie, dass $|\Psi(t)\rangle$ sich dann, im Rahmen der adiabatischen Näherung, für $t > 0$ nur um eine Phase von $|\Psi_0(t)\rangle$ (d.h. vom Grundzustand der instantanen Schrödinger-Gleichung zur Zeit t) unterscheiden kann.

d) Betrachten Sie ein freies Elektron in einem rotierenden magnetischen Feld, beschrieben durch den Hamiltonian

$$H(t) = \mu_B\hbar B_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & -\cos(\omega t) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Erwägen Sie den zeitabhängigen Zustand $\Psi(t) = \exp(-\imath\mu_B B_0 t)\begin{pmatrix} \cos(\omega t/2) \\ \sin(\omega t/2) \end{pmatrix}$. Unter welcher Bedingung erfüllt $\Psi(t)$ näherungsweise die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung $\imath\hbar\partial_t\Psi(t) = H(t)\Psi(t)$? Welche geometrische Phase besitzt $\Psi(t)$ nach einer Drehung des Magnetfeldes um 360 Grad?

4. Born'sche Näherung

3+2+2=7 Punkte

Wir betrachten ein 'soft sphere' Potential $V(r)$, gegeben durch den Ausdruck

$$V(r) = V_0 \cdot \theta(R - r). \tag{2}$$

V_0 und R sind positive Konstanten mit den Dimensionen Energie und Länge, θ ist die Heaviside-Funktion, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Es wird eine ebene Teilchenwelle mit Energie $E_k = (\hbar k)^2/2m$ in positiver z-Richtung eingestrahlt.

a) Berechnen Sie die Streuamplitude $f(\theta, \phi)$ in erster Born'scher Näherung. Skizzieren Sie $f(\theta, \phi)$ für verschiedene (durch den Impuls $\vec{k}$ bestimmte) Energien.

b) Berechnen Sie den totalen Streuquerschnitt σ_{tot} als Funktion der Energie der einfallenden Teilchen durch Integration der Streuamplitude.

c) Spezialisieren Sie Ihr Ergebnis der Streuamplitude in erster Born'scher Näherung für kleine Energien. Entwickeln Sie dazu $f(\theta, \phi)$ bis zur ersten Ordnung in qR, wobei $q = |\vec{k} - \vec{k}'|$ der Impulsübertrag bei der Streuung ist. Ebenfalls im Grenzfall kleiner Energien ergibt die 2. Bornsche Näherung: $8m^2V_0^2R^5/(15\hbar^4)$. Diskutieren Sie darauf basierend, in welchen Fällen Mehrfachstreuung vernachlässigt werden kann.