Technische Universität Wien

Prof. A. Toschi, Prof. K. Held, Dr. J. Tomczak, Dr. F. Krien

3. Übung zur Quantentheorie II

Wintersemester 2022/2023

TUTORIUM: Freitag, 18.11.2022.

5. Partialwellenstreuung

2+2=4 Punkte

Wir betrachten wieder das 'soft sphere' Potential $V(r)$, gegeben durch den Ausdruck

$$V(r) = V_0 \cdot \theta(R - r). \tag{1}$$

V_0 und R sind positive Konstanten mit den Dimensionen Energie und Länge, θ ist die Heaviside-Funktion, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Es wird eine ebene Teilchenwelle mit Energie $E_k = (\hbar k)^2/2m$ in positiver z-Richtung eingestrahlt.

a) Berechnen Sie die s-Wellen Streuamplitude $f_s(\theta)$ und die p-Wellen Streuamplitude $f_p(\theta)$ in erster Born'scher Näherung.

b) Vergleichen Sie s- und p-Streuung in den beiden Grenzfällen $R \to 0$ and $R \to \infty$.

6. Dichtematrix für Spin-Austausch

3+3+1=7 Punkte

Zwei Quantenpunkte (1 und 2) befinden sich in einem Magnetfeld B und koppeln mit einem Spin-Austausch $J{>}0$ (g: Landé-Faktor, $\mu_{\rm B}$: Bohrsches Magneton, $\hbar \equiv 1$):

$$\hat{H} = J\hat{\vec{S}}_1\hat{\vec{S}}_2 + g\mu_{\rm B}\, B(\hat{S}_1^z + \hat{S}_2^z)$$

Wir beschreiben die isolierten Quantenpunkte hier durch einen Spin-1/2 der jeweiligen Elektronen; S_i^z ist die z-Komponente des Spins des $i$ten Quantenpunkts, $\hat{\vec{S}}_i$ der Operator des Spinvektors.

a) Zeigen Sie dass H mit $(\hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2)^2$ und $\hat{S}_1^z + \hat{S}_2^z$ vertauscht. Berechnen Sie die Eigenvektoren und -werte des Problems für $B > 0$ und skizzieren sie die Eigenwerte als Funktion von B (> 0).

b) Geben Sie für den Grundzustand ($B > 0$) die Dichtematrix des Gesamtsystems und die reduzierte Dichtematrix für den 1. und 2. Quantenpunkt an.

c) Für welches B beschreiben die reduzierten Dichtematrizen einen reinen oder gemischten Zustand?

7. Dichtematrix und Addition von Drehimpulsen

2+2=4 Punkte

Zwei Spin-1 Teilchen, in der Notation $|S{=}1; m{=}{-1}, 0, {+1}\rangle_i, i = 1, 2$, koppeln zum Gesamtspin $S_{\rm tot} = 0$ und werden durch folgende Wellenfunktion beschrieben:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle = \; & \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,(|S{=}1; m{=}{+1}\rangle_1 |S{=}1; m{=}{-1}\rangle_2 \\ & +|S{=}1; m{=}{-1}\rangle_1 |S{=}1; m{=}{+1}\rangle_2 \\ & -\,|S{=}1; m{=}0\rangle_1 |S{=}1; m{=}0\rangle_2)\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die reduzierte Dichtematrix für Teilsystem 1 und 2.

b) Berechnen Sie die von-Neumann-Entropie $\mathcal{S}_{1+2}$ des Gesamtsystems, sowie $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ der Teilsysteme 1, 2. Zeigen Sie, dass die Subadditivität der Entropie, $\mathcal{S}_{1+2} \leq \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$, erfüllt ist.