

4. Übung zur Quantentheorie II

Wintersemester 2022/2023

TUTORIUM: Freitag, 2.12.2022.

8. Freie Dirac-Gleichung

4+3=7 Punkte

a) Berechnen Sie die Lösungen der stationären freien Dirac-Gleichung

$$[c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

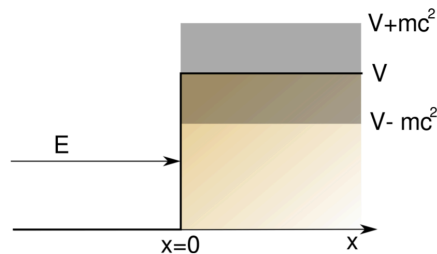
für einen Impuls in z -Richtung, $\vec{p} = (0, 0, p_0)$, und auch in x -Richtung, d.h. $\vec{p} = (p_0, 0, 0)$. Zeigen Sie, dass Sie für $\vec{p} = 0$ das in der Vorlesung präsentierte Ergebnis für die Spinorwellenfunktion eines ruhenden Teilchens erhalten.

b) Sei der 4-er Spinor $\psi(x)$ eine Lösung der Dirac Gleichung, d.h. $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = (c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2)\psi(x)$. Zeige, dass die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist mit $\rho = \psi^\dagger(x)\psi(x)$ und $\vec{j} = c\psi^\dagger(x)\vec{\alpha}\psi(x)$

9. Kleinsches Paradoxon

2+2+2+2=8 Punkte

Gegeben sei das folgende eindimensionale Potential:



mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V & x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Das System wird demnach durch folgende (stationäre) Dirac-Gleichung beschrieben:

$$[c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2 + V\theta(x)] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad E > 0, V > 2mc^2$$

Nehmen Sie nun an, dass ein Elektron mit Impuls $\vec{p} = (p, 0, 0)$ und Spin \uparrow von $x = -\infty$ kommend auf die Stufe trifft. Der Ansatz für den Eigenzustand $\psi(\vec{r})$ lautet

$$\psi(x) = \psi_I(x)\theta(-x) + \psi_{II}(x)\theta(x)$$

wobei $\psi_I(x)$ und $\psi_{II}(x)$ Lösungen der freien Dirac-Gleichung sind.

a) Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\psi_I(x)$ so dass sie einem einlaufenden Elektron mit Spin \uparrow und einem an der Barriere reflektierten Elektron mit Spin \uparrow oder Spin \downarrow entspricht.

- b) Machen Sie einen Ansatz für die Wellenfunktion $\psi_{II}(x)$ für die Fälle (i) $E > V + mc^2$; (ii) $V + mc^2 > E > V$; (iii) $V - mc^2 > E > mc^2$
- c) Bestimmen Sie mittels der Stetigkeitsbedingung für die Gesamtwellenfunktion bei $x = 0$ die Amplituden der reflektierten und der transmittierten Welle.
- d) Berechnen Sie die Teilchenstromdichte und den Reflexionskoeffizienten. Welchen Spin haben das reflektierte bzw. transmittierte Teilchen?