Technische Universität Wien

Prof. A. Toschi, Prof. K. Held, Dr. J. Tomczak, Dr. F. Krien

5. Übung zur Quantentheorie II

Wintersemester 2022/2023

<u>TUTORIUM</u>: Freitag, 16.12.2022.

10. Relativistisches Wellenpaket

1+2+2=5 Punkte

Betrachten Sie folgende Anfangsbedingung für die freie Dirac-Gleichung

$$\psi(x,t=0) = \psi_0(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2D^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Konstante C so, dass die Wellenfunktion $\psi_0(x)$ normiert ist.

b) Berechnen Sie die Zeitentwicklung $\psi(x,t)$ der Wellenfunktion $\psi_0(x)$ für $t > 0$ indem Sie $\psi_0(x)$ in Eigenfunktionen des (freien) Dirac-Operators entwickeln.

c) Betrachten Sie das Verhältnis der Koeffizienten, die zum Spinor mit positiver ($E = +\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$) bzw. negativer ($E = -\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$) Energie gehören. Was passiert für $D \to \infty$ bzw. für $D \to 0$ (lokalisiertes Elektron)?

11. Erhaltungsgröße der Dirac-Gleichung

1+2+1+1=5 Punkte

Betrachten Sie den in der VO diskutierten Dirac Operator für ein freies Teilchen in der Pauli-Dirac Darstellung:

$$\hat{H}_D = c\hat{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}mc^2$$

a) Berechnen Sie den Kommutator des Spin Operators $\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix}$ mit $\hat{H}_D$. In welchem Fall ist der Spin eine Erhaltungsgröße des Systems?

b) Berechnen Sie den Kommuatator des Dehimpuls Operators $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ mit $\hat{H}_D$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil a): Was legt dieser Vergleich nahe?

c) Berechnen Sie den Kommutator von S^2 mit $\hat{H}_D$.

d) Berechnen Sie den Kommutator des Helizität Operators $\hat{\lambda} = \frac{\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{|\hat{\mathbf{p}}|}$ mit $\hat{H}_D$. Wann ist die Helizität eine Erhaltungsgröße?

12. Spin, Drehimpuls, Helizität & Chiralität *1+2.5+1.5=5 Punkte*

a) Betrachten Sie die 4-er Spinoren aus der VO, welche die Lösung der Dirac Gleichung für ein freies Teilchen der Masse m und Impuls $\vec{p} = (p_x, 0, 0)$ darstellen. Selbige kann man als Komposition von zwei 2-er Spinoren schreiben:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-iE_p t/\hbar + ip_x x/\hbar}. \tag{1}$$

Leiten Sie nun aus den Differentialgleichungen für ϕ und χ Differentialgleichungen für die Kombinationen $\xi = \phi + \chi$ und $\eta = \phi - \chi$ ab und zeigen Sie, dass die Kopplung von ξ und η nur über den Masseterm erfolgt. Diese Darstellung nennt man die *chirale Form*.

b) (i) Geben Sie die Lösung der chiralen Form der Dirac-Gleichung für masselose Teilchen (die sogenannte *Weyl-Gleichung*) an und zeigen Sie, dass die relativistische Energie-Impuls Beziehung folgt. (ii) Zeichnen Sie letztere für den Fall masseloser Teilchen und vergleichen Sie mit der Energie-Impuls-Beziehung eines nicht-relativistischen freien Teilchens. Angewendet auf welche physikalischen Systeme gibt die Weyl-Gleichung eine gute (evtl. näherungsweise) Beschreibung? (iii) Schreiben Sie den Hamilton Operator $\hat{H}_D = c\hat{\alpha}\vec{\hat{p}}$ für masselose Teilchen in der chiralen Darstellung (geben Sie die explizite Form von $\hat{\alpha}$ an).

c) Schreiben Sie die 4-er Spinoren, die der Dirac Gleichung für ein relativistisches Teilchen ($E > 0$) bzw. Antiteilchen ($E < 0$) mit $\vec{p} = (p_x, 0, 0)$ genügen, in der chiralen Darstellung. Betrachten Sie dann den Grenzfall $|\vec{p}| \gg mc$. Schreiben Sie die resultiereden 4-er Spinoren in der (standard) Pauli-Dirac Darstellung.