1.Test Quantentheorie II, Freitag, 24.11.2023

Name: **Matrikelnummer**:

B1	B2	B3	B4	Σ
12	5	12	16	45

WICHTIG: Bitte schreiben Sie die Matrikelnummer **deutlich**, da diese dazu dienen wird, Ihnen Ihre Punkte individuell zu übermitteln.

Um Ihnen Schreibarbeit zu ersparen, können Sie für **alle Aufgaben** $\hbar \equiv 1$ annehmen.

Viel Erfolg!

1 Yukawa Potential (10+2 Punkte)

a) Betrachten Sie im Ortsraum ein Yukawa-Potential in atomaren Einheiten:

$$V(\vec{r}, \lambda) = -\frac{Z\, e^{-\lambda |\,\vec{r}\,|}}{|\,\vec{r}\,|}\,, \tag{1}$$

wobei $\lambda > 0$ reell ist.
Berechnen Sie die Fourier-Transformierte des Yukawa-Potentials $\tilde{V}(\vec{k} - \vec{k}', \lambda)$.

Hinweis:
Benutzen Sie Kugelkoordinaten und nutzen Sie die Beziehung $\vec{k}\vec{r} = |\vec{k}||\vec{r}| \cos(\Theta)$.
Wandeln Sie durch geeignete Substitution das Integral $\int d\Theta$ in ein Integral $\int d\cos(\Theta)$ um.

b) Bildet man für das Yukawa Potential $V(\vec{r}, \lambda)$ in Gleichung (1) den Limes $\lambda \to 0$ erhält man das bekannte Coulomb Potential. Argumentieren Sie ohne Rechnung worin sich diese beiden Potentiale qualitativ unterscheiden. Welche Bedeutung hat in diesem Zusammenhang der Parameter λ?

2 Bilder der Zeitentwicklung (5 Punkte)

Betrachten Sie ein System mit einem zeitunabhängigen Hamiltonoperator. $\hat{A}$ sei der Operator zu einer Observablen a des Systems im Schrödingerbild, und $\hat{A}_H$ der entsprechende Operator im Heisenbergbild.
Zeigen Sie, dass, wenn der Ausgangszustand $|\psi(0)\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{A}$ ist, der Zustand $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$ ein Eigenvektor von $\hat{A}_H(-t)$ mit dem gleichen Eigenwert ist. Schrödingerbild und Heisenbergbild sollen zum Zeitpunkt $t = 0$ zusammenfallen.

3 Dichteoperator eines Spin-$1/2$-Teilchens (3+9)

Ein beliebiger Dichteoperator eines Spin-1/2-Teilches besitzt eine eindeutige Bloch-Darstellung der Form

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(\hat{I} + \boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right), \quad \text{mit } ||\boldsymbol{n}|| \leq 1,$$

wobei $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)^T$ der Vektor der Pauli-Operatoren und $\hat{I}$ der Einheitsoperator ist. Der Vektor $\boldsymbol{n}$ charakterisiert den physikalischen Zustand eindeutig und wird als dessen Blochvektor bezeichnet. Die Pauli-Operatoren sind in der Eigenbasis des $\hat{\sigma}_z$-Operators durch die Pauli-Matrizen gegeben:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass für die Komponenten des Blochvektors gilt $n_i = \langle \hat{\sigma}_i \rangle$.

   Hinweis:

$$\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j = \delta_{ij}\hat{I} + \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$$

b) Gegeben sei der Hamiltonoperator und der Anfangszustand

$$\hat{H} = \omega\hat{\sigma}_y$$
$$|\psi\left(t = 0\right)\rangle = |0\rangle\,,$$

   wobei $|0\rangle$ der Eigenzustand des Pauli-Operators in z-Richtung mit positivem Eigenwert ist, d.h. $\hat{\sigma}_z\,|0\rangle = |0\rangle$.

   i) Berechnen Sie den zeitabhängigen Zustand $|\psi\left(t\right)\rangle$ im Schrödingerbild.

   ii) Berechnen Sie den zeitabhängigen Blochvektor von $\hat{\rho}\left(t\right) = |\psi\left(t\right)\rangle\langle\psi\left(t\right)|$ und beschreiben Sie dessen Bewegung in der Blochkugel. Interpretieren Sie, warum die Frequenz hier in der Form 2ω auftritt.

   Hinweis:

$$\cos\left(2\alpha\right) = \cos^2\left(\alpha\right) - \sin^2\left(\alpha\right)$$
$$\sin\left(2\alpha\right) = 2\sin\left(\alpha\right)\cos\left(\alpha\right)$$

4 Drehung und Wigner-Eckart Theorem (3+2+6+5 Punkte)

a) Gegeben sei die Darstellung des Rotationsoperators

$$\hat{\mathfrak{R}}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-\mathrm{i}\hat{J}_z\alpha} e^{-\mathrm{i}\hat{J}_y\beta} e^{-\mathrm{i}\hat{J}_z\gamma} \ ,$$

wobei α, β und γ die drei Eulerwinkel sind. Zeigen Sie, dass $\hat{\mathfrak{R}}$ unitär ist. Eigenschaften des Drehimpulsoperators $\hat{J}_i$ dürfen ohne expliziten Beweis verwendet werden.

b) Wie lautet der allgemeine Zusammenhang zwischen der Wirkung eines aktiven Rotationsoperators $\hat{\mathfrak{R}}(\beta)$ auf einen Zustand $|\Psi\rangle$ und einer passiven Drehung mit Drehmatrix $(\mathfrak{R}(\beta))_{ij}$ im Koordinatenraum der Wellenfunktion $\langle \mathbf{r} | \Psi\rangle$? Benennen Sie alle auftretenden Größen.

c) Berechnen Sie explizit alle Matrixelemente $\langle j, m | \hat{\mathfrak{R}}(0, \beta, -\pi/2) | j, m'\rangle$ für den Fall $j = 1/2$. $|j, m\rangle$ ist die Eigenbasis zu $\hat{J}_z$.

d) Ein rotierendes Molekül mit Dipolmoment befindet sich in einem Zustand $|j, m\rangle = |1, -1\rangle$. Die Wechselwirkung mit einem elektrischen Feld wird beschrieben durch $(\hat{Y}^1_{-1} + \hat{Y}^1_1)$ in sphärischer Darstellung. Das Übergangsmatrixelement $t^{j',m'}_{j,m}$ ist definiert als $t^{j',m'}_{j,m} = \langle j', m' | \hat{Y}^1_{-1} + \hat{Y}^1_1 | j, m\rangle$. Schreiben Sie das Wigner-Eckart Theorem an und verwenden Sie es um $\frac{t^{2,-2}_{1,-1}}{t^{2,0}_{1,-1}}$ zu berechnen.

$\mathbf{j_1 \times j_2}$		J / m_j
m_1	m_2	CG-Koeffizient ohne Wurzel

1 × 1

m_1	m_2	$J=2$, $m_j=+2$
+1	+1	1

m_1	m_2	$J=2$, $m_j=+1$	$J=1$, $m_j=+1$
+1	0	+1/2	+1/2
0	+1	+1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=2$, $m_j=0$	$J=1$, $m_j=0$	$J=0$, $m_j=0$
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

m_1	m_2	$J=2$, $m_j=-1$	$J=1$, $m_j=-1$
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=2$, $m_j=-2$
−1	−1	1