

Aufgabenblatt 1

1 Kommutatoren

a) Zeigen Sie, dass für den Kommutator zweier $N \times N$ Matrizen A und B immer gilt:

$$\text{Tr}[A, B] = 0, \quad (1)$$

wobei Tr die Spur ist. Können Ort- und Impulsoperator \hat{x} und \hat{p} als $N \times N$ Matrizen dargestellt werden? Verwenden Sie als Argument die Relation $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\hat{I}$, wobei \hat{I} der Identitätsoperator ist.

b) Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{x}, \hat{p}^{-1}]$.

(a)+(b) = 2 Kreuze

2 Impulsverteilung des H-Atoms

In einem Experiment, das im Jahr 1982 durchgeführt wurde, gelang es erstmals die Impulsverteilung des Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms direkt zu messen. Dazu wurde ein hochenergetischer Strahl von Elektronen auf Wasserstoffatome gerichtet um diese zu ionisieren. Die gesuchte Impulsverteilung $|\langle \vec{p} | \psi \rangle|^2$ der *atomaren* Elektronen im Zustand H(1s) ist nun direkt proportional zum “differentiellen Streuquerschnitt” der *einfallenden* Elektronen welcher im Experiment unmittelbar zugänglich war (siehe Abb. 1).

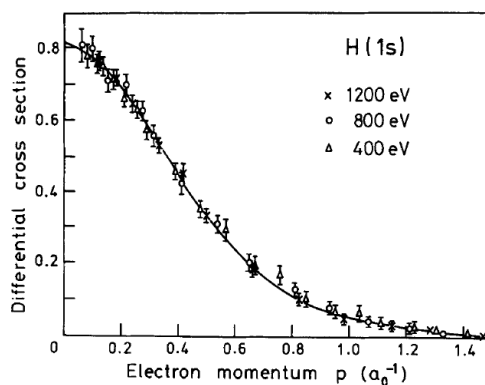


Figure 1: Impulsverteilung der Elektronen im Grundzustand des Wasserstoffatoms, gemessen durch Elektronenstrahlen mit verschiedenen Einfallsenergien [nach Weigold, AIP Conf. Proc. **86**, 1 (1982)].

- a) Berechnen Sie die gesuchte Impulsverteilung $|\langle \vec{p} | \psi \rangle|^2$ des Grundzustandes. Wenn Ihr Ergebnis richtig ist, sollte es genau mit der durchgezogenen Linie in der Abbildung übereinstimmen. Wieso hängt Ihr Ergebnis offenbar nur vom Betrag des Impulses $|p|$ ab?
- b) Nehmen Sie an, dass in einem zweiten Experiment anstatt der Wasserstoffatome einfach positiv geladene Helium-Atome (He^+) als Target für den Elektronenstrahl verwendet werden. Wie ändert sich die Impulsverteilung im entsprechenden Grundzustand des atomaren Elektrons im Vergleich zu (a)? Bringen Sie Ihr Ergebnis mit der Heisenbergschen Unschärferelation in Verbindung.

1 Kreuz

3 Impulsdarstellung eines Wellenpakets

Betrachten Sie eine allgemeine Wellenfunktion $\langle x | \psi \rangle = \psi(x) = \phi(x)e^{ik_0x}$, wobei e^{ik_0x} ein ortsabhängiger Phasenfaktor mit $k_0 > 0$ ist.

- a) Stellen Sie sowohl $\phi(x)$ als auch $\psi(x)$ im Impulsraum dar (eine explizite Auswertung der Integrale ist nicht notwendig) und interpretieren Sie, welche Auswirkungen der ortsabhängige Phasenfaktor auf die Wellenfunktion hat.
- b) Nehmen Sie an, dass $\psi(x) = Ne^{-\alpha x^2} e^{ik_0x}$ mit einer zu bestimmenden Normierungskonstante N ist und berechnen Sie den Erwartungswert des Impulsoperators $\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle$ im Ortsraum.

1 Kreuz

4 Heisenbergbild

- a) Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Ortsoperators im Heisenbergbild $\hat{x}_H(t)$ für ein freies Teilchen der Masse m in einer Dimension.
- b) Wie sieht der Zusammenhang zwischen $\hat{x}_H(t)$ und $\hat{p}_H(t)$ im Falle eines Potentials $\hat{V}(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ aus? Finden Sie eine Lösung für beide.

1 Kreuz