Aufgabenblatt 2

1 Harmonischer Oszillator

Gegeben sei der eindimensionale harmonische Oszillator, bestimmt durch den Hamilton-operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} \,.$$

a) Geben Sie die "Energie-Darstellung" (i) des Ortsoperators $\hat{x}$ und (ii) des Impulsoperators $\hat{p}$ an, indem Sie die entsprechenden Matrix-elemente $\langle n|\,\hat{x}\,|m\rangle$ bzw. $\langle n|\,\hat{p}\,|m\rangle$ berechnen (es gilt $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$). Sind Ihre Matrizen hermitesch? Begründen Sie physikalisch warum alle Diagonalelemente der Matrizen verschwinden.

b) Drücken Sie die Matrixelemente $\langle n|\,\hat{p}\,|m\rangle$ durch die Matrixelemente $\langle n|\,\hat{x}\,|m\rangle$ aus, indem Sie $\alpha_{n,m}$ in

$$\langle n|\,\hat{p}\,|m\rangle = \alpha_{n,m}\,\langle n|\,\hat{x}\,|m\rangle$$

bestimmen.

c) Zeigen Sie auf Basis der Ergebnisse aus (a) und (b), dass für den harmonischen Oszillator das "Ehrenfest-Theorem" gilt, wonach für einen beliebigen Zustand $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\sum_n c_n|n\rangle$ die Erwartungswerte für Ort und Impuls die klassischen Bewegungsgleichungen erfüllen:

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{m}\langle\psi(t)|\hat{p}|\psi(t)\rangle \,,$$
$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\hat{p}|\psi(t)\rangle = -m\omega^2\langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle \,.$$

(ab) + (c) = 2 Kreuze

2 Zeitentwicklung im Wechselwirkungsbild

Betrachten Sie ein Elektron mit Spin-1/2 in einem externen Magnetfeld $\vec{B} = (B, 0, B)^T$. Mit $\vec{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)^T$ ist der Hamiltonoperator $\hat{H}$ gegeben durch:

$$\hat{H} = -\vec{\mu}\vec{B} = \frac{e}{mc}\vec{S}\vec{B}.$$

a) Schreiben Sie $\hat{H}$ in der Eigenbasis von $\hat{S}_z$ an. Teilen Sie den Hamiltonoperator in einen Anteil $\hat{H}_0$, der in der $\hat{S}_z$-Basis diagonal ist, und einen off-diagonalen Anteil $\hat{V}$ auf.

b) Schreiben Sie den Operator $\hat{V}_I$ im Wechselwirkunsgbild an.

c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Spin in dem Zustand $|\Psi(t=0)\rangle = \left|s = \frac{1}{2}, m_{s,z} = \frac{1}{2}\right\rangle$. Geben Sie explizit die zeitabhängige Wellenfunktion im Schrödingerbild $|\psi_S(t)\rangle$, Heisenbergbild $|\psi_H(t)\rangle$ und Wechselwirkungsbild $|\psi_I(t)\rangle$ an.

d) Berechnen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert von $\left\langle \hat{S}_z(t) \right\rangle$ explizit im Schrödinger- und im Wechselwirkungsbild.

1 Kreuz

3 Liouville-von Neumann Gleichung

Ein statistisches Gemisch bestehend aus zwei Zuständen $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ befindet sich in einem harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right)$.
Zur Zeit $t = 0$ sind die beiden Zustände gegeben durch eine Superposition von Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators $|i\rangle$:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2\,|1\rangle + |3\rangle\right) \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_1,$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(1\,|1\rangle - 2\,|3\rangle\right) \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_2.$$

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt $p_1 = 3p_2$.

a) Berechnen Sie p_1 und p_2 und schreiben Sie den Dichteoperator $\hat{\rho}$ des Gemisches in der Energiebasis des harmonischen Oszillators in Matrixform an.

b) Zeigen Sie explizit, dass ein Gemisch vorliegt, indem Sie $\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}^2\right)$ berechnen.

c) Berechnen Sie $\hat{\rho}(t)$ indem Sie die Liouville-von Neumann Gleichung im Schrödingerbild lösen. Wie sieht $\hat{\rho}(t)$ im Heisenbergbild aus?

d) Berechnen Sie den Erwartungswert der Ortsunschärfe Δx.

1 Kreuz

4 Dichteoperatoren

Gegeben sei der Operator

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbb{1}} + \vec{n}\vec{\sigma}\right) \ ,$$

mit $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^T \in \mathbb{R}^3$ und dem Vektor der Pauli-Matrizen $\vec{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)^T$.

a) Unter welchen Umständen besitzt $\hat{\rho}$ die Eigenschaften eines Dichteoperators eines Spin-1/2 Teilchens? Wann liegt ein reiner bzw. gemischter Zustand vor?

b) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Operator $\hat{a}$ immer gilt: $\mathrm{tr}[\hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger] \geq 0$, wobei $\hat{\rho}$ ein beliebiger Zustand ist.

1 Kreuz