Aufgabenblatt 5

1 Entartete Störungstheorie

Der Hamiltonoperator eines Systems von zwei (unterscheidbaren) Spins $s = 1/2$ sei durch

$$\hat{H} = \frac{1}{\hbar}\left(\hat{S}_z^{(1)} + \hat{S}_z^{(2)}\right) + \lambda \frac{4}{\hbar^2}\hat{S}_x^{(1)}\hat{S}_x^{(2)}$$

mit $0 < \lambda \ll 1$ gegeben (die Energie wird hier in dimensionslosen Einheiten gemessen).

a) Verwenden Sie eine störungstheoretische Beschreibung um die Energiekorrekturen $\varepsilon_i^{(1)}$ in erster Ordnung in λ sowie die daraus resultierenden Näherungswerte der Energien $E_i^{[1]} = E_i^0 + \varepsilon_i^{(1)}$ zu berechnen.

b) Stellen Sie $\hat{H}$ als Matrix in der $\{m_{S1} m_{S2}\}$-Basis dar und bestimmen Sie die exakten Energieeigenwerte. Vergleichen Sie diese mit den Näherungswerten aus Punkt (a) und kommentieren Sie die Ergebnisse. Welches physikalische System könnte durch den Hamiltonoperator $\hat{H}$ beschrieben werden?

(a) + (b) = 2 Kreuze

2 Variationsverfahren

Gegeben sei ein Teilchen in einem anziehenden δ-Potential, welches durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \bar{k}}{m}\hat{\delta}(\hat{x})$$

beschrieben wird. Bestimmen Sie eine Näherung E_0^{var} für die Grundzustandsenergie E_0 von $\hat{H}$ mit Hilfe des Variationsverfahrens. Verwenden Sie hierzu die Testfunktionen

$$\psi_T(x, \alpha) = \langle x|\psi_T\rangle = Ne^{-\alpha|x|}$$

mit dem Variationsparameter $\alpha > 0$.

a) Bestimmen Sie zunächst die Norm $\langle\psi_T|\psi_T\rangle$ und berechnen Sie dann das Energie-Funktional

$$E[\psi_T] = \frac{\langle\psi_T|\hat{H}|\psi_T\rangle}{\langle\psi_T|\psi_T\rangle} .$$

b) Bestimmen sie das Minimum von $E[\psi_T]$ durch Variationsrechnung. Ist Ihr Ergebnis exakt? Warum / Warum nicht? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit jenem aus dem ersten Plenum (siehe TUWEL-Kurs).

(a) + (b) = 2 Kreuze

3 Zeitabhängige Störungstheorie

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit der Masse m und der Eigenfrequenz ω befindet sich für $t < 0$ im Grundzustand $|0\rangle$. Für $t > 0$ wirkt auf den Oszillator eine zeitabhängige Kraft der Form $f(t) = f_0 e^{-\alpha t}$, wobei f_0 und $\alpha > 0$ reelle Konstanten sind. Die Störung wird also durch den Hamiltonoperator

$$\hat{V}(t) = -f(t)\hat{x}$$

beschrieben.

a) Berechnen Sie in erster Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Oszillator für $t \to \infty$ in einem angeregten Zustand $|n\rangle$ $(n \geq 1)$ befindet.

b) Wie hoch ist somit die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Oszillator für $t \to \infty$ im Grundzustand befindet? Geben Sie ein Kriterium an, mit welchem die Gültigkeit der Störungstheorie erster Ordnung abgeschätzt werden kann, und begründen Sie Ihre Wahl.

c) Nehmen Sie an, Sie würden in der Störungstheorie nicht nur die erste, sondern die ersten M Ordnungen berücksichtigen. Wie viele Niveaus könnten in dieser Rechnung prinzipiell angeregt werden? Begründen Sie Ihre Antwort, es ist keine Rechnung nötig.

1 Kreuz