

Übungsblatt 2

25.10.2012

1. Lorentzgruppe

Die Lorentztransformation für entlang der x -Richtung bewegte Bezugssysteme ist $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ mit

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (1)$$

Zeige, dass die Lorentztransformationen eine Gruppe bilden:

- Bestimme das Einheitslement und die inverse Transformation.
- Zeige Assoziativität: $(\Lambda_a \Lambda_b) \Lambda_c = \Lambda_a (\Lambda_b \Lambda_c)$.
- Zeige, dass die Verknüpfung zweier Lorentztransformationen wieder eine Lorentztransformation ist: $\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_3$ mit $v_3 = \frac{v_1 + v_2}{(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2})}$.
- Die *Rapidity* θ ist definiert als $\tanh \theta = \frac{v}{c}$. Schreibe die Lorentztransformation als Ausdruck in θ um und berechne die Verknüpfung zweier Lorentztransformationen. Was fällt dir auf?

2. Verknüpfung von Lorentztransformationen

Ein Bezugssystem S' bewegt sich relativ zu einem Bezugssystem S mit Geschwindigkeit \vec{v}_1 . Ein weiteres Bezugssystem S'' bewegt sich relativ zu S' mit der Geschwindigkeit \vec{v}_2 wobei gilt $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$.

- Berechne die Transformationsmatrix vom System S in das System S'' .
- Mit welcher Geschwindigkeit $\vec{v}'' = (v''_x, v''_y, v''_z)^T$ bewegt sich S'' relativ zu S ?
Hinweis: Nimm dazu an, dass S die Geschwindigkeit $\vec{v} = (0, 0, 0)^T$ hat.

3. Kausalität und Gleichzeitigkeit

Zwei Ereignisse finden an folgenden Raumzeitpunkten statt:

	Fall A	Fall B
Ereignis 1	$t = 2 \cdot 10^{-9} \text{s}$ $x = 0.3 \text{m}$ $y = 0.5 \text{m}$ $z = 0.0 \text{m}$	$t = 5 \cdot 10^{-9} \text{s}$ $x = 0.7 \text{m}$ $y = 0.5 \text{m}$ $z = 0.0 \text{m}$
Ereignis 2	$t = 3 \cdot 10^{-9} \text{s}$ $x = 0.4 \text{m}$ $y = 0.7 \text{m}$ $z = 0.0 \text{m}$	$t = 4 \cdot 10^{-9} \text{s}$ $x = 0.4 \text{m}$ $y = 0.6 \text{m}$ $z = 0.0 \text{m}$

- (a) Sind in den Fällen A und B Ereignis 1 und Ereignis 2 jeweils kausal zusammenhängend? (Die Lichtgeschwindigkeit ist $3 \cdot 10^8 \text{m/s}$.)
- (b) Gibt es ein Bezugssystem in dem Ereignis 1 und Ereignis 2 *gleichzeitig* sind?
Hinweis: Wähle das Koordinatensystem so, dass die Transformation möglichst einfach ist.

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2, 3