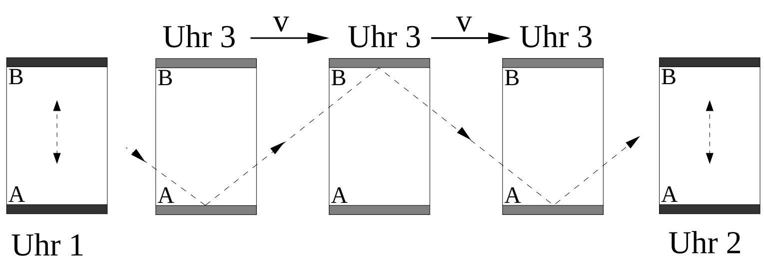
ÜBUNGEN ZUR ELEKTRODYNAMIK II WS 13/14

Aufgabenblatt 1 **11.10.2013**

1.1 Zeitdilatation

Zur Wiederholung aus der Relativitätstheorie: Zwischen zwei parallelen Spiegeln A und B mit Abstand L bewege sich ein Lichtblitz hin und her. Diese "Uhr" ticke bei jedem Auftreffen des Lichtblitzes auf den Spiegel A, was durch einen Zähler registriert werde. Es seien nun zwei solcher Uhren synchronisiert und in einem festen Abstand voneinander aufgestellt. Eine dritte bewege sich dazu mit der konstanten Relativgeschwindigkeit v wie im Bild dargestellt. Berechne mit Hilfe geometrischer Überlegungen den Faktor, um den die bewegte Uhr langsamer geht als die beiden ruhenden.



1.2 Index-Gymnastik

1. Welche Bedingung muss der Viererimpuls k^μ erfüllen, damit

$$\partial_\mu \partial^\mu e^{ik\cdot x} = 0 \tag{1}$$

gilt. Hier ist $k \cdot x = k_\mu x^\mu$ das Skalarprodukt im Minkowski-Raum und $\partial_\mu \partial^\mu$ der 4-dimensionale Laplace-Operator, der in der Wellengleichung auftritt.

2. Zeige, dass für einen nicht-lichtartigen Vierervektor x^μ, d.h. $x^2 \neq 0$,

$$\partial_\mu \partial^\mu \frac{1}{x^2} = 0 \tag{2}$$

gilt, wobei $x^2 = x_\mu x^\mu$.

3. Wie viele von 0 verschiedene Elemente hat der total antisymmetrische Einheitstensor vom Rang 4, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$? Für sein dreidimensionales Analogon, ϵ_{ijk}, gilt bekanntermaßen, dass dieser sein Vorzeichen bei zyklischer Vertauschung seiner Indizes beibehält. Man mache sich klar, dass diese Regel für $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ in dieser Allgemeinheit falsch ist.

4. Zeige, dass dieser Tensor unter Standard-Lorentztransformationen invariant ist, d.h. zeige, dass $\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ gilt, mit

$$\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\,\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\,\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\,\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,. \tag{3}$$

   Hinweis: Schreibe die rechte Seite dieser Gleichung als Determinante einer geeigneten Matrix.

1.3 Übung zur Viererschreibweise

Verifiziere, dass der Energie-Impuls-Tensor $T^{\nu\mu} = \frac{1}{4\pi c}(F^{\nu\sigma}F_{\sigma}{}^{\mu} + \frac{1}{4}g^{\nu\mu}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau})$ die Gleichung $\partial_\nu T^{\nu\mu} = -\frac{1}{c^2}F^{\mu\nu}j_\nu$ erfüllt, wobei $F^{\mu\nu}$ der Feldstärketensor und j^ν die Viererstromdichte ist.
Hinweis: Verwende die Maxwell-Gleichungen in Viererschreibweise $\frac{4\pi}{c}j_\nu = \partial^\sigma F_{\sigma\nu}$ und $\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0$ (aus Elektrodynamik I bekannt, werden am Montag nochmal in der Vorlesung diskutiert).