# ÜBUNGEN ZUR ELEKTRODYNAMIK II WS 13/14

**Aufgabenblatt 5** **08.11.2013**

## *5.1 Teilchenbahn in gekrümmtem Raum*

Die Wirkung eines freien Teilchens mit Masse $m$ in krummlinigen Koordinaten ist gegeben durch

$$S = mc \int ds \,,$$

mit dem Wegelement $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$ und einer beliebigen symmetrischen Metrik $g_{\mu\nu}(x)$. Durch Einführen eines beliebigen Bahnparameters $u$ lässt sich die Wirkung durch eine Lagrangefunktion ausdrücken,

$$ds = L \, du \,, \qquad L = mc\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \,, \tag{1}$$

wobei der Punkt Ableitung nach $u$ bedeutet.
Zeige, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen für $L$ sich schreiben lassen als

$$\ddot{x}^\rho + \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \dot{x}^\rho \,, \tag{2}$$

mit

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \,. \tag{3}$$

*Bemerkung:* Mit $u = s$ verschwindet die rechte Seite von Glg. (2). Die resultierende Gleichung $\ddot{x}^\rho + \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0$ nennt man *Geodätengleichung*, die daraus resultierende Bahnkurve eines freien Teilchens in einem gekrümmten Raum *Geodäte*. Die in Glg. (3) definierten Größen nennt man *Christoffelsymbole*. Sie spielen eine wichtige Rolle in der Allgemeinen Relativitätstheorie.

*5.2 Erhaltener Strom und Energie-Impuls-Tensor*

Es sei eine Lagrangedichte für ein komplexes Feld $\phi(\vec{x}, t)$ gegeben durch

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi^* - m^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4$$

mit $|\phi|^2 = \phi\phi^*$ und positiven Konstanten $m$ und $\lambda$.

1. Bestimme die Euler-Lagrange-Gleichungen für $\phi$ und $\phi^*$.

2. Zeige durch explizites Nachrechnen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen, dass der Strom und der Energie-Impulstensor,

$$j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \, \partial^\mu \phi^*) \,, \quad T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \, \partial^\nu \phi^* + \partial^\nu \phi \, \partial^\mu \phi^* - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \,,$$

   erhalten sind, d.h. dass $\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ gilt.

*Bemerkung:* Die Erhaltung von Strom und Energie-Impuls-Tensor sind beides Konsequenzen des *Noether-Theorems*, als Folge dessen zu jeder kontinuierlichen Symmetrie des Lagrangians eine Erhaltungsgröße gehört. In diesem Fall gehört der erhaltene Strom zur Symmetrie bzgl. Transformationen der Form $\phi \to e^{i\alpha}\phi$ und die Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors zur Translationsinvarianz.