ÜBUNGEN ZUR ELEKTRODYNAMIK II WS 13/14

Aufgabenblatt 9 **06.12.2013**

9.1 Magnetische Torte

Ein Strom I fließe durch einen unendlich langen, infinitesimal dünnen Draht entlang der z-Achse. Drei Halbebenen mit der z-Achse als gemeinsamer Schnittachse stehen in den Winkeln α_1, α_2, α_3 mit $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 2\pi$ zueinander. (Eine Schnittebene senkrecht zu z-Achse sieht also aus wie eine in drei Stücke aufgeteilte Torte.) Die drei Räume zwischen den Halbebenen seien mit magnetischen Medien mit Permeabilitäten μ_1, μ_2, μ_3 gefüllt. Bestimme die Magnetfelder $\vec{H}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ in den drei Bereichen.
Hinweis: Wähle als Ansatz für $\vec{H}_i$ dieselbe Form wie in einem homogenen Medium, allerdings mit einem effektiven Strom $\tilde{I}_i$, der, ähnlich wie in der Methode der Bildladungen, den Effekt der Medien enthält.

9.2 Diffusion im Plasma

1. Zeige mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen, dass in einem stationären Plasma (d.h. $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$) mit ohmscher Leitfähigkeit σ und Permeabilitätskonstante $\mu = 1$ das Magnetfeld die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = D\,\Delta \vec{B} \tag{1}$$

mit der Diffusionskonstanten $D = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ erfüllt.

2. Das Magnetfeld im Plasma sei zur Zeit $t = 0$ gegeben durch $\vec{B}(\mathbf{x}, 0) = B(x)\vec{e}_z$ mit

$$B(x) = \begin{cases} B_0 & |x| \leq L \\ 0 & |x| > L \end{cases}$$

Bestimme mit Hilfe von Glg. (1) die Zeitentwicklung des Magnetfeldes.

Anleitung: Die Variablen x und t lassen sich mit einem Produktansatz separieren, so dass die entstehenden beiden Seiten der Differentialgleichung gleich einer Konstante, sagen wir $-k^2$, sein müssen. Die allgemeine Lösung kann dann als Integral über k geschrieben werden und die Integrationskonstanten (eine Funktion von k) durch die obige Anfangsbedingung ausgedrückt werden. Dabei verwende man das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-k^2 Dt} e^{ik(x-x')} = \sqrt{\frac{\pi}{Dt}}\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dt}} \,.$$

9.3: Minkowski-Tensor & Lorentz-Invariante im Medium

1. Zeige, dass $T^{\mu}_{\ \mu} = 0$, wobei $T^{\mu\nu}$ der Minkowski-Tensor ist (siehe Vorlesung am kommenden Montag).

2. Zeige, dass der Ausdruck $w^2 - \vec{g} \cdot \vec{S}$ eine Lorentz-Invariante im Medium ist. Hierbei ist w die Energiedichte, $\vec{g}$ die Impulsstromdichte, und $\vec{S}$ der Poyntingvektor des elektromagnetischen Feldes im Medium. (Für die Definitionen siehe Vorlesung bzw. Vorlesungsfolien.)

   Hinweis: Überlege dir zunächst, welche Lorentz-Invarianten aus den Tensoren $H^{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu}$ gebildet werden können.