ÜBUNGEN ZUR ELEKTRODYNAMIK II WS 13/14

Aufgabenblatt 11 **20.12.2013**

11.1 Welle im Dielektrikum trifft senkrecht auf Leiter

Eine ebene elektromagnetische Welle in einem Dielektrikum mit Brechungsindex n treffe senkrecht auf die Oberfläche eines Leiters mit Brechungsindex $n + i\kappa$. Zeige, dass die Phasenverschiebung des elektrischen Feldes der reflektierten Welle zum elektrischen Feld der eintreffenden Welle gegeben ist durch die Phase

$$\varphi = \arctan \frac{2n}{\kappa} \,. \tag{1}$$

Nimm dafür an, dass die magnetische Permeabilität in beiden Medien 1 ist.

11.2 Skin-Effekt

Diskutiere den Skin-Effekt ausgehend von den Maxwell-Gleichungen für ein Medium mit $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, $\vec{j} = \sigma\vec{E}$.

1. Leite zunächst die "Telegraphengleichungen" für $\vec{E}$ und $\vec{H}$ im Ortsraum her (Wiederholung aus der Vorlesung Elektrodynamik I).

2. Benutze nun die Telegraphengleichung für $\vec{E}$, um das Profil eines elektrischen Feldes mit Frequenz ω in einem zylindrischen Draht mit Radius R zu bestimmen. Verwende Zylinderkoordinaten und zeige, dass sich mit $\mu = 1$ und für einen guten Leiter ($4\pi\sigma \gg \epsilon\omega$)

$$\vec{E}(\rho) = E(R) \frac{J_0\left(\frac{1+i}{\delta}\,\rho\right)}{J_0\left(\frac{1+i}{\delta}\,R\right)} \,, \tag{2}$$

   ergibt, wobei $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$ die aus der Vorlesung bekannte Eindringtiefe ist.

   Hinweis: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

ist gegeben durch $y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$, wobei c_1 und c_2 Konstanten und $J_n(x)$ bzw. $Y_n(x)$ die Bessel-Funktionen 1. bzw. 2. Art sind. Verwende $J_0(0) = 1$ und $Y_0(0) = -\infty$.

11.3 Wo erhitzt man am besten ein Steak?

1. Betrachte die in der vorigen Aufgabe hergeleitete Telegraphengleichung zunächst ohne Näherung (d.h. ohne die Annahme eines guten Leiters) und zeige, dass sie mit dem Ansatz $\vec{E}(\rho, z, t) = E(\rho)\vec{e}_z e^{-i\omega t}$ für große ρ in der Form

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \rho^2} = -\alpha^2 E(\rho) \tag{3}$$

   geschrieben werden kann. Leite dann aus der expliziten Form von α die allgemeine Form der Eindringtiefe

$$\delta = \frac{\sqrt{2}c}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]^{-1/2} \tag{4}$$

   her, die im Grenzfall guter Leiter in die aus der Vorlesung bekannte Form übergeht.

2. Berechne die Eindringtiefe δ für ein Steak in der Mikrowelle. Verwende die Mikrowellenfrequenz $f = 2.45\,\mathrm{GHz}$ und für das Steak $\epsilon \simeq 49$, $\sigma \simeq 2 \times 10^{10}\,\mathrm{s}^{-1}$. Überzeuge dich zunächst, dass das Steak als schlechter Leiter betrachtet werden kann und verwende den entsprechenden Grenzfall der allgemeinen Formel (4). Bringt die Mikrowelle Vorteile bzgl. der Eindringtiefe im Vergleich zu einem Ofen mit Infrarot-Strahlung $f \simeq 3 \times 10^{13}\,\mathrm{Hz}$?

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2014!