ÜBUNGEN ZUR ELEKTRODYNAMIK II WS 13/14

Aufgabenblatt 12 **10.01.2014**

12.1 Meissner-Effekt im Supraleiter

Die elektromagnetischen Eigenschaften eines Supraleiters können mit Hilfe der phänomenologischen London-Gleichungen

$$\frac{\partial \vec{\jmath}}{\partial t} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E}\,, \tag{1a}$$

$$\operatorname{rot} \vec{\jmath} = -\frac{n_s e^2}{mc} \vec{B}\,, \tag{1b}$$

beschrieben werden. Hierbei ist $\vec{\jmath}$ die Stromdichte im Supraleiter und n_s, e und m die Anzahldichte, Ladung und Masse der supraleitenden Ladungsträger (Cooper-Paare). Zeige mit Hilfe von Glg. (1b), dass Magnetfelder im Supraleiter exponentiell abfallen, $B \propto e^{-x/\lambda}$, und berechne die sogenannte Eindringtiefe λ.

12.2 Ginzburg-Landau-Theorie eines Supraleiters

Die Lagrange-Dichte der Ginzburg-Landau-Theorie ist

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left|\left(\nabla - \frac{ie\vec{A}}{\hbar c}\right)\phi\right|^2 + \alpha|\phi|^2 - \frac{\beta}{2}|\phi|^4 - \frac{(\nabla \times \vec{A})^2}{8\pi}\,, \tag{2}$$

Hier ist $\phi(\vec{x})$ ein komplexes Feld, $\vec{A}(\vec{x})$ das Vektorpotential, α, β positive Parameter, sowie m und e die Masse und Ladung der supraleitenden Ladungsträger.

1. Leite Differentialgleichungen für ϕ^* und $\vec{A}$ her mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi^*)} = 0\,, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_j} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i A_j)} = 0\,.$$

2. Wie muss der Strom $\vec{\jmath}$, ausgedrückt durch ϕ und $\vec{A}$, lauten, damit die Euler-Lagrange-Gleichung für $\vec{A}$ identisch ist mit der Maxwell-Gleichung $\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath}$? Zeige, dass man mit dem so definierten Strom

die London-Gleichung (1b) herleiten kann: Nimm dafür an, dass der Betrag von $\phi(\vec{x})$ konstant ist, d.h. $\phi(\vec{x}) = \phi_0 e^{i\psi(\vec{x})}$ mit einem konstanten ϕ_0. Wie muss man nun n_s definieren, um Glg. (1b) zu bekommen?

12.3 Vortex im Supraleiter

In *Typ-II Supraleitern* kann das Magnetfeld in quasi-eindimensionalen Regionen in den Supraleiter eindringen. Einen solchen Vortex (oder *Flussschlauch*) kann man im Formalismus von Aufgabe 12.2 beschreiben durch den folgenden Ansatz in Zylinderkoordinaten (r, φ, z),

$$\phi(r, \varphi) = \phi_0 f(r) e^{in\varphi}\,, \qquad \vec{A}(r) = \frac{\hbar c}{e} a(r) \vec{e}_\varphi\,, \tag{3}$$

mit $\phi_0 = \sqrt{\alpha/\beta}$, der sogenannten Windungszahl $n = 1, 2, 3, \ldots$, und zu bestimmenden Funktionen $f(r)$, $a(r)$. Das Magnetfeld $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ ist parallel zum Vortex, dessen Zentrum bei $r = 0$ ist. Die Phase des Feldes ϕ erhöht sich um $2\pi n$ entlang einer Kreisschleife um den Vortex.

1. Zeige, dass sich mit diesem Ansatz die in Aufgabe 12.2 hergeleiteten Euler-Lagrange-Gleichungen schreiben lassen als

$$\left(\frac{n}{r} - a\right)^2 f - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{f - f^3}{\xi^2}\,, \tag{4a}$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (ra)}{\partial r}\right) = \frac{f^2}{\lambda^2}\left(\frac{n}{r} - a\right)\,, \tag{4b}$$

   wobei $\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\alpha}}$ die sogenannte *Kohärenzlänge* ist und $\lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 \phi_0^2}}$ die *Eindringtiefe* (vgl. Aufgabe 12.1).

2. Diskutiere die Gleichungen (4) für den Grenzfall großer Abstände vom Vortex, $r \to \infty$ (man beschränke sich auf den Fall $n = 1$).

   Anleitung: Verwende den Ansatz $f(r) = 1 + u(r)$, $a(r) = \frac{1}{r} + v(r)$ mit $u(\infty) = v(\infty) = 0$. Linearisiere in u, v, d.h. vernachlässige alle Terme u^2, v^2, uv etc. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + p^2) y = 0$$

   ist gegeben durch $y(x) = c_1 I_p(x) + c_2 K_p(x)$ mit den *modifizierten Bessel-Funktionen* 1. und 2. Art, wobei $I_p(\infty) = \infty$, $K_p(\infty) = 0$.