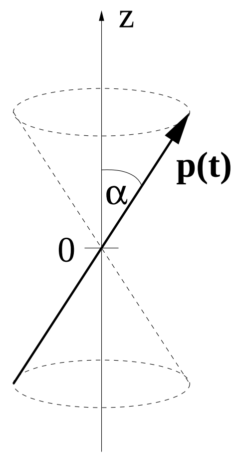
ÜBUNGEN ZUR ELEKTRODYNAMIK II WS 13/14

Aufgabenblatt 13 **17.01.2014**

13.1 Abstrahlung eines rotierenden elektrischen Punktdipols

Ein elektrischer Punktdipol besitze ein Dipolmoment mit zeitlich konstantem Betrag p_0. Er rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse, wobei sein Dipolmoment $\vec{p}(t)$ mit der z-Achse den Winkel α einschließt, siehe Abbildung. Berechne die mittlere Abstrahlungsleistung pro Raumwinkeleinheit in einer Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und bestimme die Raumrichtungen in denen die mittlere Abstrahlung am stärksten bzw. schwächsten ist. Berechne auch die insgesamt im Zeitmittel abgestrahlte Leistung.



13.2 Kreisförmige Schleifenantenne

Eine Antenne bestehe aus einer kreisförmigen Drahtschleife vom Radius a, die sich in der x-y-Ebene mit ihrem Mittelpunkt im Ursprung befindet. Der im Draht fließende Strom sei in Zylinderkoordinaten durch

$$\vec{j}(\vec{r},t) = -I\,\delta(z)\delta(\rho - a)e^{-i\omega t}\vec{e}_\varphi \tag{1}$$

gegeben. Berechne für den Fall $a \ll \lambda = 2\pi c/\omega$ die im Zeitmittel abgestrahlte Leistung $\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle$ sowie den Strahlungswiderstand R_s.
Anleitung: Berechne zunächst das Magnetfeld in der Strahlungszone $B_s(\vec{r},t)$ für beliebige Radien a mit Hilfe des allgemeinen Strahlungsmomentes $\dot{\vec{q}}(\vec{k})$. Verwende dazu folgende Integrale:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-ix\cos\varphi}\cos\varphi \quad = \quad -2i\pi J_1(x)\,,$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-ix\cos\varphi}\sin\varphi \quad = \quad 0\,,$$

wobei $J_n(x)$ die schon aus Aufgabe 11.2 bekannten Bessel-Funktionen 1. Art sind. Für den Grenzfall $a \ll \lambda$ verwende dann das Verhalten für kleine Argumente,

$$J_1(x) \simeq \frac{x}{2}\,. \tag{2}$$

13.3 Hohlleiter mit Dreiecksquerschnitt

Betrachte einen Hohlleiter, dessen Querschnitt ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck mit Seitenlängen a, a, $\sqrt{2}a$ ist (für das Medium im Hohlleiter gelte $\epsilon = \mu = 1$). Bestimme $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$. Welche Moden (TE, TM, TEM) sind erlaubt und wie lauten die entsprechenden Grenzfrequenzen? (Die Grenzfrequenz einer Mode ist die Frequenz ω, oberhalb derer die Wellenzahl k reell ist.)
Anleitung: Man löst diese Aufgabe am einfachsten, indem man den dreieckigen Hohlleiter auffasst als quadratischen Hohlleiter mit zusätzlichen Randbedingungen auf der Diagonale des Quadrats. Bestimme also zunächst das elektrische Feld für einen quadratischen Hohlleiter mit Seitenlänge a (dies ist offensichtlich ein Spezialfall des in der Vorlesung behandelten rechteckigen Hohlleiters). Diskutiere dann die zusätzlichen Randbedingungen auf der Diagonale und bestimme so $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld für den dreieckigen Hohlleiter. Aus dem Ergebnis lassen sich die erlaubten Moden und deren Grenzfrequenzen ablesen.