Übungsblatt 3

30.10.2014

1. **Maxwellgleichungen mit magnetischen Quellen**
Unter der Annahme der Existenz von magnetischen Monopolen haben die Maxwellgleichungen folgende Form:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_e \tag{1}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \rho_m \tag{2}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{J}_m\right) \tag{3}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_e\right), \tag{4}$$

wobei $(\rho_e, \vec{J}_e)$ die elektrischen und $(\rho_m, \vec{J}_m)$ die magnetischen Ladungs- und Stromdichten sind.

   (a) Zeige, dass die erweiterten Maxwellgleichungen unter den folgenden Transformationen invariant sind:

$$\vec{E}' = \vec{E}\cos\xi - z_0\vec{H}\sin\xi \tag{5}$$
$$\vec{B}' = \vec{B}\cos\xi + z_0\vec{D}\sin\xi \tag{6}$$
$$\begin{pmatrix}\rho'_e\\ \vec{J}'_e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho_e\\ \vec{J}_e\end{pmatrix}\cos\xi - \frac{1}{z_0}\begin{pmatrix}\rho_m\\ \vec{J}_m\end{pmatrix}\sin\xi \tag{7}$$
$$\begin{pmatrix}\rho'_m\\ \vec{J}'_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho_m\\ \vec{J}_m\end{pmatrix}\cos\xi + z_0\begin{pmatrix}\rho_e\\ \vec{J}_e\end{pmatrix}\sin\xi, \tag{8}$$

   mit $z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$.

   (b) Diskutiere die Spezialfälle $\xi = 0$ und $\xi = \frac{\pi}{2}$.

   (c) Zeige, dass $\vec{E}\times\vec{H}$ und $(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B})$ invariant sind.

2. **Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes**
Das elektromagnetische Feld erfüllt folgende Kontinuitätsgleichung:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_K}{\partial t}, \tag{9}$$

wobei $\vec{S}$ der Energiefluss (Poyntingvektor) ist, u die Feldenergiedichte und u_K die kinetische Energiedichte der Teilchen.

Bestimme für ein lineares Medium mit Materialeigenschaften ϵ und μ die Größe $\frac{\partial u_k}{\partial t}$ mithilfe der Definitionen von $\vec{S}$ und u und unter der Bedingung, dass die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist. Wie ist der Ergebnis zu interpretieren?

3. **Linear polarisierte elektromagnetische Welle**

   (a) Bestimme das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x},t)$ und das Skalarpotential $\vec{V}(\vec{x},t)$ für eine linear polarisierte ebene Welle im Vakuum der Form

   $$\vec{E}(\vec{x},t) = E_0 e^{i(kz-\omega t)}\vec{e}_x \tag{10}$$
   $$\vec{B}(\vec{x},t) = B_0 e^{i(kz-\omega t)}\vec{e}_y \tag{11}$$

   mit $B_0 = \frac{E_0}{c} \in \mathbb{R}$. Verwende die Randbedingung, dass die Potentiale im Unendlichen einen endlichen Wert haben müssen.
   Hinweis: Die Rechnung vereinfacht sich, wenn man $V = 0$ wählt.

   (b) Betrachte nun eine allgemeine linear polarisierte Welle mit Wellenvektor $\vec{k}$, Polarisationsrichtung $\vec{n}$ und Frequenz $\omega = c|\vec{k}|$. Bestimme das Skalar- und das Vektorpotential.

   (c) Nimm an, dass die Randbedingung aus (a) nicht gilt und zeige, dass

   $$\vec{A}(\vec{x},t) = -B_0 x e^{i(kz-\omega t)}\vec{e}_z \tag{12}$$
   $$V(\vec{x},t) = -cB_0 x e^{i(kz-\omega t)} \tag{13}$$

   die Lorentzeichung erfüllen und auch auf (10) und (11) führt.

   (d) Verifiziere Energieerhaltung der linear polarisierten Welle gegeben durch (10) und (11).

Ankreuzbar: 1a, 1bc, 2, 3ab, 3cd