Übungsblatt 12

15.01.2015

1. **Elektromagnetische Wellen in Leitern**

   Eine ebene in y-Richtung polarisierte elektromagnetische Welle breite sich in x-Richtung aus. Die Welle treffe auf einen Leiter, an $x > 0$ (an $x < 0$ sei Vakuum). Der Wellenvektor $\kappa = \kappa_1 + i\kappa_2$ im Leiter ist eine komplexe Zahl und die Dispersionsrelation ist

   $$\kappa^2 = i\mu\sigma\omega + \mu\epsilon\omega^2, \tag{1}$$

   wobei σ die Leitfähigkeit ist.

   (a) Löse das Randwertproblem für die elektromagnetische Welle und bestimme die Amplitude der reflektierten Welle. Nimm an, dass $\mu = \mu_0$ innerhalb des Leiters.

   (b) Bestimme den Reflexionskoeffizienten für einen guten Leiter mit $\sigma \gg \epsilon\omega$.

   (c) Zeige, dass auf der Oberfläche eines guten Leiters das Feld der reflektierten Welle annähernd das Feld der einfallenden Welle mit gegenläufiger Ausbreitungsrichtung ist.

2. **Phasen- und Gruppengeschwindigkeit**

   Im Vakuum breitet sich eine elektromagnetische Welle mit der Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$ aus[1]. In dielektrischen Medien hängt die Lichtgeschwindigkeit von der Frequenz ab. Das ergibt eine Dispersionsrelation $\omega = v(\omega)k$. Damit definiert man die Gruppengeschwindigkeit $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$. Im Vakuum gilt $v_{ph} = v_{gr}$, in Medien ist im Allgemeinen $v_{ph} \neq v_{gr}$. In Leitern gilt die Dispersionsrelation (1). Die Phasengeschwindigkeit ist definiert als $v_{ph} = \frac{\omega}{\kappa_1(\omega)}$ und ist im allgemeinen frequenzabhängig. Die Gruppengeschwindigkeit ist definiert als $v_{gr} = \frac{d\omega}{d\kappa_1}$. Während die Phasengeschwindigkeit die Geschwindigkeit eines Punktes konstanter Phase in der Welle ist, ist die Gruppengeschwindigkeit die Geschwindigkeit eines Wellenpakets. Die Gruppengeschwindigkeit ist relevant für technische Anwendungen, da sie die maximale Geschwindigkeit ist, mit der Information durch elektromagnetische Wellen übertragen werden kann.

   Betrachte nun ein Gauss'sches Wellenpaket

   $$\phi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx-\omega t)} f(k) \frac{dk}{2\pi} \qquad f(k) = f_0 e^{-(k-k_0)^2 a^2} \quad k \in (-\infty, \infty). \tag{2}$$

   Das Maximum des Wellenpakets ist an $k = k_0$ und seine Breite ist von der Größenordnung $\frac{1}{a}$. In der Nähe des Maximums kann man die Dispersionsrelation durch eine Taylorreihe annähern:

   $$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0)\omega'(k_0) \qquad \omega'(k_0) \equiv \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k=k_0}. \tag{3}$$

[1] Da im Vakuum $\omega = ck$ ist die Phasengeschwindigkeit immer die Lichtgeschwindigkeit. In dielektrischen Medien ist die Phasengeschwindigkeit $v_{ph} < c$ weiterhin als $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$ definiert.

(a) Berechne $\phi(x,t)$.
Hinweis: Verwende

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq e^{(iqa+b)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a^2}} \qquad a,b \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

(b) Berechne v_{ph} und v_{gr}.

3. **Retardierte Potentiale**
Lösen der Vakuum-Maxwellgleichungen für allgemeine zeitabhängige Quellterme $\rho(\vec{x},t)$, $\vec{J}(\vec{x},t)$ mithilfe der Green'schen Funktion führt auf folgende retardierte Potentiale:

$$V(\vec{x},t) = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{5}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \mu_0 \int d^3x' \frac{\vec{J}\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}. \tag{6}$$

In einem unendlich langen Draht entlang der z-Achse werde zum Zeitpunkt $t = 0$ ein konstanter Strom I eingeschaltet.

(a) Berechne die retardierten Potentiale.

(b) Berechne das elektrische und das magnetische Feld. Wie sehen die Felder zu einem Zeitpunkt $t \gg \frac{r}{c}$ aus?

Ankreuzbar: 1a, 1bc, 2ab, 3a, 3b