Elektrisch-magnetische Dualität und magnetische Monopole

Johanna Knapp

Version 16.10.2014

1 EM-Dualität der Maxwellgleichungen im Vakuum

Die Maxwellgleichungen im Vakuum lauten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{1}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{4}$$

Gleichung (1) ist das Gauss'sche Gesetz das besagt, dass keine Ladungsquellen für das elektrische Feld $\vec{E}$ vorhanden sind. Gleichung (2) besagt, dass das magnetische Feld $\vec{B}$ quellenfrei ist. Gleichung (3) ist das Induktionsgesetz, welches besagt, dass ein zeitlich veränderliches Magnetfeld ein elektrisches Feld induziert. Gleichung (4) ist das Ampère'sche Gesetz, wobei μ_0 und ϵ_0 Permeabilität und Dielektrizitätskonstante des Vakuums sind, und

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}. \tag{5}$$

Die Maxwellgleichungen sind invariant unter Austausch des elektrischen und des magnetischen Feldes:

$$\vec{E} \longrightarrow \vec{B} \qquad\qquad \vec{B} \longrightarrow -\mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \tag{6}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass unter der Transformation jeweils Gleichungen (1) und (2) sowie Gleichungen (3) und (4) in einander übergehen. Das wird als elektrisch-magnetische Dualität bezeichnet.

Diese Dualität gibt es nicht mehr, wenn wir äussere Quellen einschalten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{7}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{8}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{9}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{10}$$

wobei die Ladungsdichte ρ die Quelle des elektrischen und der Strom $\vec{J}$ die Quelle des magnetischen Feldes ist. In Anwesenheit von Materie werden Gleichungen (7) und (10) ersetzt durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \tag{11}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{12}$$

wobei der Index f die freie Ladungs- bzw. Stromdichte bezeichnet. Mit der Polarisierbarkeit $\vec{P}$ sowie der Magnetisierung $\vec{M}$ gilt

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{13}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}. \tag{14}$$

In einem linearen Medium gilt weiter

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \tag{15}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \vec{M} = \chi_m \vec{H}, \tag{16}$$

wobei $\chi_{e/m}$ die elektrische/magnetische Suszeptibilität ist. ε ist die Dielektrizitätskonstante, μ ist die Permeabilität. Ohne Materie gilt $\epsilon = \epsilon_0$ sowie $\mu = \mu_0$.

Dass die elektrisch-magnetische Dualität nicht in Anwesenheit von Quellen funktioniert ist dadurch begründet dass das elektrische Feld Ladungen als Quellen hat, das magnetische jedoch von Strömen erzeugt wird. Es gibt elektrische Punktladungen aber keine magnetischen.

2 Maxwellgleichungen mit magnetischen Monopolen

Gäbe es magnetische Ladungen, sogenannte magnetische Monopole, würde die elektrisch-magnetische Dualität auch mit äusseren Quellen funktionieren. Dazu bezeichnen wir die elektrische Ladungs- und Stromdichte mit $(\rho_e, \vec{J}_e)$. Weiters führen wir eine magnetische Ladungs- bzw. Stromdichte $(\rho_m, \vec{J}_m)$ ein. Damit lassen sich die Maxwellgleichungen in symmetrischer Form anschreiben:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e \tag{17}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_m \tag{18}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{J}_m\right) \tag{19}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_e\right). \tag{20}$$

Diese Gleichungen sind wieder invariant unter elektrisch-magnetischer Dualität, wobei auch die entsprechenden Quellen ausgetauscht werden (siehe Übungsaufgabe!).

Da man elektrische und magnetische Größen in einander transformieren kann, ist es eine Frage der Konvention zu sagen, ob ein Teilchen elektrische oder magnetische Ladung hat. Wenn alle Teilchen, dasselbe Verhältnis zwischen elektrischer und magnetischer Ladung haben, kann man eine Transformation finden, sodass $\rho_m = \vec{J}_m = 0$ und man die Maxwellgleichungen ohne magnetische Quellterme zurückbekommt. Wenn das wirklich der Fall ist, dann kann man für das Elektron $q_e = -e$ und $q_m = 0$ wählen. Laut Experiment hat das Proton die Ladung $q_e = +e$ und keinen magnetischen Anteil. Die experimentelle Schranke dafür ist

$$|q_e(e^-) + q_e(p)| = O(10^{-20}). \tag{21}$$

Für Nukleonen gilt

$$|q_m(nucl.)| < 2 \cdot 10^{-24} z_0 e, \tag{22}$$

wobei $z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$. Es ist daher sehr unwahrscheinlich, dass es magnetische Monopole in der Elektrodynamik gibt. Die Resultate sind weniger klar bei anderen Elementarteilchen die der starken und schwachen Wechselwirkungen unterliegen. Bisher sind jedoch alle Untersuchungen diesbezüglich negativ ausgefallen. Da magnetische Monopole auch in der Stringtheorie und anderen vereinheitlichten Theorien auftauchen, besteht immer noch die Möglichkeit, dass sie in anderem Zusammenhang existieren.

Abgesehen von ästhetischen Betrachtungen bezüglich der Symmetrie der Maxwellgleichungen, liefert die Existenz magnetischer Monopole auch eine Erklärung für die Quantisierung der elektrischen Ladung.

3 Quantisierungsbedingung der elektrische Ladung

Im Jahr 1931 lieferte Paul Dirac eine Erklärung der Quantisierung der elektrischen Ladung, die die Existenz von magnetischen Monopolen voraussetzt. Man betrachte ein Elektron in Gegenwart eines Monopols mit Ladung $q_m = g$. Dirac leitete folgende Bedingung für eine konsistente Quantisierung ab:

$$\frac{eg}{4\pi\hbar} = \frac{\alpha g}{z_0 e} = \frac{n}{2} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{23}$$

wobei $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ die Feinstrukturkonstante ist. Die Gleichung besagt, dass, falls es einen magnetischen Monopol gibt, die elektrische Elementarladung nur ein ganzzahliges Vielfaches einer Konstante (abhängig von der Monopolladung) sein kann. Wir werden dieses Resultat nun auf zwei Arten, einmal semiklassisch und einmal quantenmechanisch, ableiten.

3.1 Semiklassische Ableitung

Ein Teilchen mit elektrischer Ladung e und Masse m bewege sich im Feld eines stationären Monopols mit Ladung g. Zur Näherung nehmen wir an, dass sich das Teilchen so schnell und in so großem Abstand vom Monopol bewegt, dass seine Laufrichtung nicht durch das Feld des Monopols geändert wird, siehe Abbildung 1. Nach der magnetischen Version des Coulombgesetzes ist das Magnetfeld des Monopols

$$\vec{B} = \frac{g}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{24}$$

Aufgrund der Näherung wirkt nur eine Lorentzkraft in y-Richtung:

$$F_y = evB_x = \frac{eg}{4\pi}\frac{vb}{(b^2 + v^2t^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{25}$$

wobei laut Abbildung $r^2 = b^2 + (vt)^2$. Nachdem Newton'schen Gesetz $F = m \cdot a = m \cdot \dot{v}$ erhält das Teilchen eine Impulsänderung in y-Richtung.

$$\Delta p_y = \frac{egvb}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(b^2 + v^2t^2)^{\frac{3}{2}}} \overset{r=\frac{v}{b}t}{=} \frac{egvb}{4\pi}\frac{1}{b^3}\frac{b}{v}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dr}{(1 + r^2)^{\frac{3}{2}}}}_{2} = \frac{eg}{2\pi b} \tag{26}$$

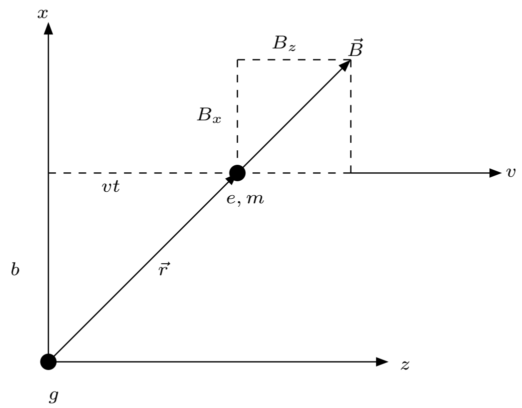

Abbildung 1: Ein Teilchen mit Ladung e und Masse m bewegt sich im Feld eines stationären Monopols.

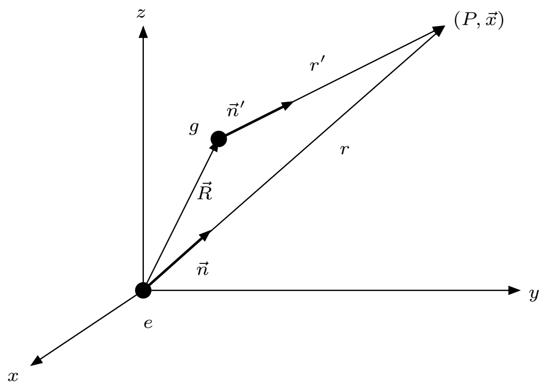

Abbildung 2: Wir berechnen den Impuls des elektromagnetischen Feldes am Punkt P.

Der Drehimpuls des Teilchens bekommt somit auch eine Komponente in z-Richtung:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ vt \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta p_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -vt\Delta p_y \\ 0 \\ b\Delta p_y \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Die Impulskomponente in z-Richtung ist unabhängig von b und v und somit eine universelle Größe.

$$\Delta L_z = b\Delta p_y = \frac{eg}{2\pi}. \tag{28}$$

Aus der Quantenmechanik wissen wir, dass der Impuls als ein Vielfaches von $\hbar$ quantisiert ist: $L_z = n\hbar$. Das liefert die Quantisierungsbedingung.

Wir können auch den Drehimpuls des elektrischen Feldes berechnen, wenn sich das Teilchen am Monopol vorbei bewegt. Dafür wählen wir ein Koordinatensystem, wo das elektrisch geladene Teilchen im Ursprung liegt, siehe Abbildung 2. Wie berechnen das elektrische und das magnetische Feld am Punkt P am Ort $\vec{x}$:

$$\vec{H} \quad = \quad -\frac{g}{4\pi\mu_0}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r'}\right) = \frac{g}{4\pi\mu_0}\frac{\vec{n}'}{r'^2} \qquad r' = |\vec{x} - \vec{R}| \tag{29}$$

$$\vec{E} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{n}}{r^2} \qquad r = |\vec{x}|. \tag{30}$$

Nun definieren wir die elektromagnetische Impulsdichte

$$\vec{g} = \frac{\vec{E}\times\vec{H}}{c^2}. \tag{31}$$

Damit definiert man den Gesamtimpuls und den Gesamtdrehimpuls des elektromagnetischen Feldes:

$$\vec{p}_{em} = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{g} \tag{32}$$

$$\vec{L}_{em} = \vec{x}\times\vec{g}. \tag{33}$$

Zuerst zeigen wir, dass der Gesamtimpuls verschwindet. Die einzige ausgezeichnete Richtung der Anordnung ist der Abstandsvektor $\vec{R}$ der beiden Ladungen. Daraus folgern wir, dass

$$\vec{p}_{em} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}p \tag{34}$$

mit

$$p = \int \vec{g}\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}. \tag{35}$$

Mit der Definition von $\vec{g}$ gilt

$$\vec{g}\cdot\vec{R} \propto \vec{R}\underbrace{(\vec{n}\times\vec{n}')}_{\vec{k}}. \tag{36}$$

Der Vektor $\vec{k}$ steht normal auf $\vec{n}$ und $\vec{n}'$. Da jedoch $\vec{R}$ in derselben Ebene liegt wie $\vec{n}$ und $\vec{n}'$, folgt $\vec{g}\cdot\vec{R} = 0$ und somit $\vec{p}_{em} = 0$.

Da der Gesamtimpuls verschwindet, ist der Drehimpuls unabhängig von der Wahl des Ursprungs. Nun berechnen wir $\vec{L}_{em}$. Mit $\vec{x} = \vec{n}r$ und (5) berechnen wir

$$\begin{aligned} 4\pi\vec{L}_{em} &= \mu_0 e\int \frac{1}{r}\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{H})d^3x \\ &\overset{(38)}{=} -\mu_0 e\int \frac{1}{r}(\vec{H}-\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{H}))d^3x \\ &\overset{(39)}{=} -e\int(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{n}d^3x. \end{aligned} \tag{37}$$

Im ersten Schritt haben wir die Identität

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \tag{38}$$

verwendet sowie $(\vec{n})^2 = 1$. Im zweiten Schritt verwendet man

$$(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{n}f(r) = \frac{f(r)}{r}[\vec{a}-\vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n})] + \vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n})\frac{\partial f}{\partial r} \tag{39}$$

für den Spezialfall $f(r) = 1$ sowie $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$. Partielle Integration ergibt

$$4\pi\vec{L}_{em} = e\int_V \vec{n}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})d^3x - e\int_{S=\partial V}\vec{n}(\vec{B}\cdot\vec{n}_S)dA, \tag{40}$$

wobei $\vec{n}_S$ der Normalenvektor auf die Oberfläche S ist. Das Oberflächenintegral liefert keinen Beitrag, da es von der Form $\int_S \vec{n} d\vec{\Omega}$ ist. Aufgrund der Symmetrie der Anordnung ist das Integral 0, wenn man über alle Raumwinkel mittelt.

Für den Punktförmigen Monopol an $\vec{x} = \vec{R}$ ist das Gauss'sche Gesetz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = g\delta(\vec{x} - \vec{R}). \tag{41}$$

Das Volumsintegral ist dann trivial zu berechnen und wir erhalten

$$\vec{L}_{em} = \frac{eg}{4\pi} \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}. \tag{42}$$

Um die Diracsche Quantisierungsbedingung zu erhalten, muss man annehmen, dass $\vec{L}_{em}$ halbzahlig quantisiert ist. Unter der entsprechenden Näherung kann man sehen, dass sie Summe des Impulses des Teilchens und des Feldes verschwinden[1].

3.2 Quantenmechanische Ableitung

Die korrekte Ableitung der Quantisierungsbedingung folgt aus der Quantenmechanik. Der Hamiltonperator für die elektromagnetische Wechselwirkung ist

$$H = e\phi - \frac{e}{m}\vec{p} \cdot \vec{A} + \frac{e^2}{2m}\vec{A} \cdot \vec{A}, \tag{43}$$

wobei ϕ das elektrostatische und $\vec{A}$ das Vektorpotential ist. Die eigentlichen Felder gehen nicht in den Hamiltonoperator ein und berechnen sich wie folgt aus den Potentialen

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} && (44) \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} && (45) \end{aligned}$$

Die Potentiale selbst sind keine physikalischen Größen und nur bis aus Eichtransformationen bestimmt:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t} && (46) \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f, && (47) \end{aligned}$$

wobei f eine beliebige Skalarfunktion ist. Für magnetische Ladungen benötigen wir einen Trick um mit Potentialen arbeiten zu können. Da

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \tag{48}$$

eine mathematische Tatsache ist, kann man aus einem Vektorpotential niemals die Maxwellgleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_m$ erhalten. Für einen punktförmigen Monopol brauchen wir

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} d^3x = g. \tag{49}$$

[1] Das Vorzeichen kommt daher, dass wir g und e vertauscht haben ($\vec{R} \leftrightarrow -\vec{R}$). Den Faktor 2 erhält man durch Taylorentwicklung von $\frac{1}{|\vec{R}|}$ unter der Annahme, dass $b \sim vt$.

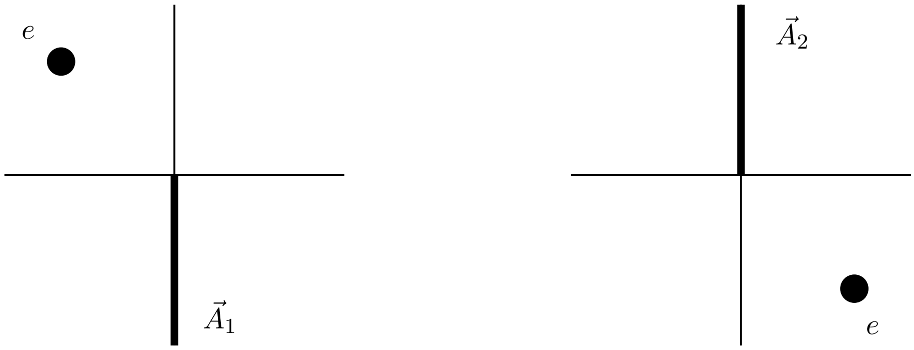

Abbildung 3: Position des Dirac-Strings.

Wir suchen also nach einem Vektorpotential sodass gilt

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{X}, \tag{50}$$

wobei

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} d^3x = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{X} d^3x = \int_{S=\partial V} \vec{X} \cdot d\vec{A} \stackrel{!}{=} g. \tag{51}$$

Man kann $\vec{X}$ als etwas wählen, das überall an S verschwindet, ausser an einem Punkt. Dort muss der Wert unendlich sein, also eine (δ-förmige) Singularität, da sonst das Integral verschwindet. Das Volumen V kann beliebig gewählt werden, solange der Monopol enthalten ist. Deshalb braucht man eine Singularität für jede Wahl des Volumens. In anderen Worten, man braucht eine Linie an Singularitäten. Das wird als Dirac-String bezeichnet. Den Dirac-String kann man sich auf zwei Arten vorstellen:

- als eine Reihe von magnetischen Dipolen an deren Spitze der Monopol sitzt.
- als ein unendlich langes und dünnes Solenoid an dessen Spitze der Monopol sitzt.

Da physikalische Größen nicht singulär werden dürfen, muss bei einem singulären $\vec{X}$ auch das Vektorpotential $\vec{A}$ singulär werden und die Singularitäten müssen sich in den physikalischen Größen aufheben. Aus diesem Grund kann das Vektorpotential nicht global definiert werden. Man braucht mindestens zwei Potentiale, die jedoch durch Eichtransformationen mit einander verbunden sein müssen, da man sonst die Physik ändern würde. Je nach Position der Ladung wählt man ein Potential, das entweder entlang der positiven oder entlang der negativen Achse singulär wird, siehe Abbildung 3. Wir stellen uns den Dirac-Sting als eine Reihe von magnetischen Dipolen vor. Das Vektorpotential eines magnetischen Dipols mit Dipolmoment $\vec{m}$ ist

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}, \tag{52}$$

oder infinitesimal

$$d\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{m} \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \tag{53}$$

wobei $\vec{x}'$ die Position des infinitesimalen Dipols ist, siehe Abbildung 4. Nun integrieren wir

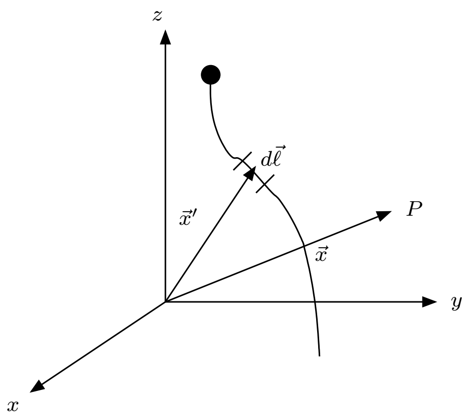

Abbildung 4: Integration entlang des Dirac-Strings.

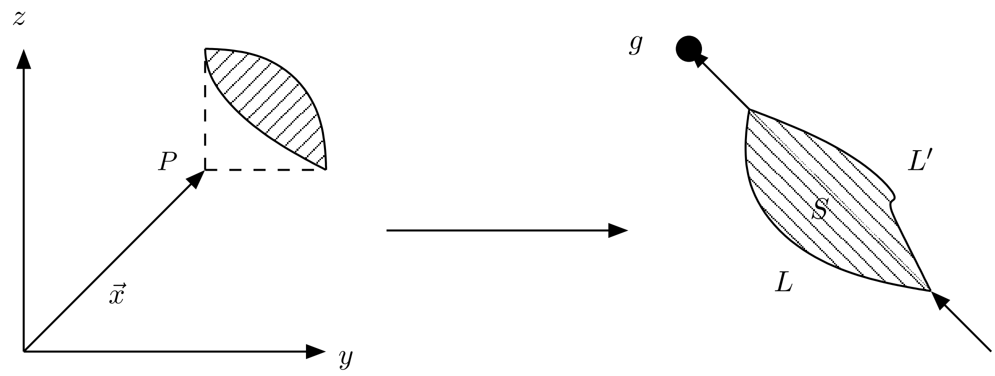

Abbildung 5: Integration über verschiedene Positionen des Dirac-Strings.

über die gesamte Länge L des Strings:

$$\vec{A}_L(\vec{x}) = -\frac{g}{4\pi}\int_L d\vec{\ell}' \times \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}. \tag{54}$$

Hier haben wir verwendet, dass sich alle magnetischen Ladungen herausmitteln, ausser der Ladung des magnetischen Monopols. Wenn $\vec{x} \neq \vec{x}'$ zeigt das Feld ausgehend vom Monopol radial nach aussen und hat eine $\frac{1}{r^2}$-Abhängigkeit. Der Fluss nach aussen ist g. An $\vec{x} = \vec{x}'$, also im Inneren des Strings ist das Potential singulär. Den Beitrag zum Magnetfeld nennen wir $\vec{B}'$ mit Fluss $-g$, sodass der Fluss des Monopols im Inneren des Strings aufgehoben wird. Das Feld des Monopols ohne diesen Beitrag ist

$$\vec{B}_{mon} = \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{B}', \tag{55}$$

wobei $\vec{B}' \equiv \vec{X}$ aus der allgemeinen Diskussion nur entlang des Strings nicht verschwindet. Da der Dirac-String nur ein Hilfskonstrukt ist, sollten physikalische Größen nicht von seiner Position abhängen. Unterschiedliche Positionen L, L' liefern unterschiedliche Potentiale, siehe Abbildung 5. Die Differenz der Potentiale ist

$$\vec{A}_L - \vec{A}_{L'} = -\frac{g}{4\pi}\oint_C d\ell' \times \vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}, \tag{56}$$

mit $C = L' - L$. Die Potentialdifferenz hat dieselbe Struktur wie das Feld einer geschlossenen Leiterschleife

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{\ell}' \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \tag{57}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla}\Omega, \tag{58}$$

wobei Ω der Raumwinkel ist unter dem man die Stromschleife vom Beobachtungspunkt aus sieht. Wir wiederholen die Ableitung dieses Resultats. Dazu benötingen wir zwei Identitäten:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \tag{59}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b}. \tag{60}$$

Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{\mu_0 I} \vec{B}(\vec{x}) \vec{e}_{\vec{x}} &= \oint_C \vec{e}_{\vec{x}} \left[d\vec{\ell}' \times \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] \\
&\overset{(59)}{=} \oint_C d\vec{\ell}' \left[\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \times \vec{e}_{\vec{x}} \right] \\
&= \int_S d\vec{A}' \left\{ \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \times \left[\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \times \vec{e}_{\vec{x}} \right] \right\} \\
&\overset{(60)}{=} \int_S d\vec{A}' \Bigg\{ \left[\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] (\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \vec{e}_{\vec{x}}) - \vec{e}_{\vec{x}} \left[\Delta_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] \\
&\quad + (\vec{e}_{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}'}) \left[\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] - \left(\left[\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \right) \vec{e}_{\vec{x}} \Bigg\} \\
&\overset{(\vec{x} \neq \vec{x}')}{=} \int_S d\vec{A}' \left\{ 0 - 0 + (\vec{e}_{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}'}) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - 0 \right\} \\
&= \int_S d\vec{A}' \frac{\partial}{\partial x_i'} \left[\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] \\
&= -\int_S d\vec{A}' \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_i} \int_S dA' \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \right) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \left(-\frac{\cos\theta dA'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_i} \int_S (-d\Omega') = \frac{\partial}{\partial x_i} \Omega(x).
\end{aligned} \tag{61}$$

Der Winkel θ ist der Winkel zwischen der Flächennormalen $\vec{n}$ und $\vec{x}'$. Aus diesem Resultat folgern wir

$$A_{L'}(\vec{x}) = \vec{A}_L(\vec{x}) + \frac{g}{4\pi} \vec{\nabla}\Omega_C(\vec{x}), \tag{62}$$

wobei $\Omega_C(\vec{x})$ der Raumwinkel der Kontur ist. Damit haben wir gezeigt, dass die Potentiale für zwei unterschiedliche Positionen des Dirac-Strings sich nur um eine Eichtransformation unterscheiden, siehe Gleichung (47). Somit haben wir auch gezeigt, dass sich die zwei Konfigurationen in Abbildung 3 nur um eine Eichtransformation unterscheiden.

Nun kehren wir zurüch zur Quantenmechanik. Die Eichtransformation der Wellenfunktion ist

$$\psi \to \psi' = \psi e^{ief/\hbar}, \tag{63}$$

mit

$$f = \frac{g\Omega_C}{4\pi}. \tag{64}$$

Der Raumwinkel Ω_C ändert sich um 4π, wenn ein elektrisch geladenes Teilchen einmal um S hermumgeht. Somit wäre die Wellenfunktion mehrdeutig. Damit das nicht passiert muss die Dirac-Quantisierungsbedingung erfüllt sein:

$$\frac{eg}{\hbar} = 2\pi n \qquad\qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{65}$$

Die Dirac-Quantisierungsbedingung folgt also aus der Eichinvarianz und der Eindeutigkeit der Wellenfunktion.

3.2.1 Beispiel

Als Beispiel betrachten wir einen magnetischen Monopol an $r = 0$ und einen Dirac-String entlang der z-Achse. Das Feld des Monopols ausserhalb des String ist

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = \frac{g}{r^2}\vec{e}_r. \tag{66}$$

Um dieses Feld im ganzen Raum zu beschreiben, braucht man zwei Vektorpotentiale

$$\vec{A}_\pm(r, \theta, \varphi) = g\frac{\pm 1 - \cos\theta}{r \sin\theta}\vec{e}_\varphi. \tag{67}$$

A_+ ist singulär an $\theta = \pi$, A_- an $\theta = 0$. Daher ist A_+ regulär für $0 \leq \theta \leq \pi - \epsilon$ an A_- für $\epsilon \leq \theta \leq \pi$ ($\epsilon > 0$). Nun zeigen wir, dass die Differenz der beiden Potentiale einer Eichtransformation entspricht. Mithilfe des Gradienten in Kugelkoordinaten findet man

$$\vec{A}_+ - \vec{A}_- = \frac{2g}{r \sin\theta}\vec{e}_\varphi = 2g\vec{\nabla}\varphi, \tag{68}$$

was in der Tat eine Eichtransformation ist. Schliesslich überzeugen wir uns davon, dass der Rotor der Potentiale in der Tat $\vec{B}$ ergibt:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A}_\pm &= \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{g(\pm 1 - \cos\theta)}{r}\right)\vec{e}_r \\ &= \frac{g}{r^2}\vec{e}_r. \end{aligned} \tag{69}$$

Literatur

[1] J.D. Jackson, “Classical Electrodynamics”, Wiley, New York, NY (1999)

[2] P. A. M. Dirac, “The Theory of magnetic poles,” Phys. Rev. **74**, 817 (1948).